Corrigé du devoir en temps libre n°12

Problème

1. Soit $X \in S(0,1)$. La matrice H_X est clairement symétrique et on a, avec l'associativité du produit matriciel

$$H_X{}^\top H_X = H_X^2 = (I_n - 2XX^\top)^2 = I_n - 4XX^\top + 4X\underbrace{(X^\top X)}_{=1}X^\top = I_n - 4XX^\top + 4XX^\top = I_n$$

La matrice H_X est donc orthogonale d'où $h_x \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ puisque la base $\mathscr{C}$ est orthonormée. Par ailleurs, on a également $h_x^2 = \mathrm{id}$ ce qui prouve qu'il s'agit d'une symétrie qui est également une isométrie et on conclut

$$\boxed{\text{Pour } X \in S(0,1), \text{ on a } H_X \in \mathcal{O}_n(\mathrm{R}) \text{ et } h_x \text{ est une symétrie orthogonale.}}$$

2. Soit $X \in S(0,1)$. Il vient

$$H_X X = X - 2X(X^\top X) = X - 2X = -X$$

et $$\forall Y \in \mathrm{Vect}\,(X)^\perp \qquad H_X Y = Y - 2X\langle X, Y\rangle = Y$$

d'où $$h_x(x) = -x \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathrm{Vect}\,(x)^\perp \qquad h_x(y) = y$$

Ainsi dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ de premier vecteur x, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} h_x = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-1} \end{array}\right)$$

On en déduit

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour } X \in S(0,1), \text{ la matrice } H_X \text{ est matrice de la réflexion} \\ \text{orthogonale par rapport à } \mathrm{Vect}\,(x)^\perp \text{ avec } X = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} x.\end{array}}$$

3. On pose $v = \dfrac{u}{\|u\|}$. La famille (v) est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}\,(u)$. On a la décomposition de l'espace

$$E = \mathrm{Vect}\,(v) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}\,(v)^\perp$$

et pour un vecteur $x \in E$, la décomposition associée est

$$x = \underbrace{\langle x, v\rangle\, v}_{\in \mathrm{Vect}\,(u)} + \underbrace{x - \langle x, v\rangle\, v}_{\in \mathrm{Vect}\,(u)^\perp}$$

Ainsi $$\sigma(x) = -\langle x, v\rangle\, v + x - \langle x, v\rangle\, v$$

D'où $$\boxed{\forall x \in E \qquad \sigma(x) = x - 2\left\langle x, \frac{u}{\|u\|}\right\rangle \frac{u}{\|u\|}}$$

Puis $$\sigma(a) = a - 2\left\langle a, \frac{a-b}{\|a-b\|}\right\rangle \frac{a-b}{\|a-b\|} = a - 2\langle a, a-b\rangle \frac{a-b}{\|a-b\|^2}$$

On trouve $$\langle a, a-b\rangle = \|a\|^2 - \langle a, b\rangle = 1 - \langle a, b\rangle$$

et $$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 - 2\langle a,b\rangle + \|b\|^2 = 2(1-\langle a,b\rangle)$$

Ainsi $$\boxed{\sigma(a) = a-(a-b) = b}$$

4. On pose $\mathrm{V} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} v$. On a

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \sigma(x) = x - 2\langle x,v\rangle v = x - 2v\langle v,x\rangle$$

et matriciellement

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad (\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\sigma)\,\mathrm{X} = \mathrm{X} - 2\mathrm{V}\mathrm{V}^\top\mathrm{X} = (\mathrm{I}_n - 2\mathrm{V}\mathrm{V}^\top)\mathrm{X}$$

Autrement dit $$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\sigma = \mathrm{I}_n - 2\mathrm{V}\mathrm{V}^\top = \mathrm{H}_\mathrm{V}}$$

Variante : On peut aussi utiliser le résultat de la question 2 : l'application canoniquement associée à H_V est la réflexion orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\,(v)^\perp = \mathrm{Vect}\,(u)^\perp$. L'intérêt de la première approche est de faire apparaître la forme *matrice de Householder* sans connaissance *a priori* de celle-ci.

5. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$. On pose $\widetilde{\mathrm{X}} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline \mathrm{X} \end{array}\right)$. On vérifie

$$\widetilde{\mathrm{X}}\widetilde{\mathrm{X}}^\top = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{X}\mathrm{X}^\top \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathrm{X}}^\top\widetilde{\mathrm{X}} = \mathrm{X}^\top\mathrm{X}$$

D'où $$\boxed{\widetilde{\mathrm{X}}^\top\widetilde{\mathrm{X}} = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{H}_{\widetilde{\mathrm{X}}} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{n-1} - 2\mathrm{X}\mathrm{X}^\top \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{H}_\mathrm{X} \end{array}\right)}$$

6. Un calcul par blocs donne

$$\mathrm{A}^\top\mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathrm{L}^\top & \mathrm{B}^\top \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathrm{L} \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathrm{L} \\ \hline \mathrm{L}^\top & \mathrm{L}^\top\mathrm{L} + \mathrm{B}^\top\mathrm{B} \end{array}\right)$$

On obtient $$\boxed{\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff \mathrm{L} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{B} \in \mathcal{O}_{n-1}(\mathbb{R})}$$

7. On a $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ puisque la base canonique $\mathscr{C}$ est orthonormée. Ainsi, les vecteurs $f(e_1)$ et e_1 sont unitaires, distincts et on applique le résultat de la question 3 avec $a = f(e_1)$ et $b = e_1$. Par conséquent

$$\boxed{\text{La réflexion orthogonale } \sigma \text{ par rapport à } \mathrm{Vect}\,(f(e_1)-e_1)^\perp \text{ vérifie } \sigma \circ f(e_1) = e_1.}$$

8. Pour $n = 1$, une matrice de $\mathcal{O}_1(\mathbb{R})$ est soit (1) donc un produit vide de matrices de Householder, soit (-1) c'est-à-dire égale à $\mathrm{H}_{(1)}$. On suppose le résultat vrai au rang $n-1$ avec $n \geqslant 2$ entier fixé. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et f l'isométrie canoniquement associée. Si $f(e_1) = e_1$, alors, d'après le résultat de la question 6, on a $\mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right)$ avec $\mathrm{B} \in \mathcal{O}_{n-1}(\mathbb{R})$. Par hypothèse de récurrence, on dispose de $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r$ dans la sphère unité de $\mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{B} = \prod\limits_{i=1}^{r} \mathrm{H}_{\mathrm{X}_i}$ avec $r \leqslant n-1$. On en déduit

$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \prod\limits_{i=1}^{r} \mathrm{H}_{\mathrm{X}_i} \end{array}\right) = \prod_{i=1}^{r} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{H}_{\mathrm{X}_i} \end{array}\right)$$

d'où $$\mathrm{A} = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{H}_{\widetilde{\mathrm{X}_i}}$$

Si $f(e_1) \neq e_1$, on choisit σ réflexion orthogonale de $\mathbb{R}^n$ tel que $\sigma \circ f(e_1) = e_1$ et $\sigma \circ f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. D'après le résultat de la question 4, on dispose de $X_1 \in S(0,1)$ tel que $H_{X_1} = \text{mat}_{\mathscr{C}}\sigma$ et par conséquent, d'après le résultat de la question 6

$$H_{X_1}A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad B \in \mathcal{O}_{n-1}(\mathbb{R})$$

En procédant comme précédemment, on dispose de $X_2, \ldots, X_r$ dans $S(0,1)$ avec $r \leqslant n$ telles que

$$H_{X_1}A = \prod_{i=2}^{r} H_{X_i}$$

d'où

$$A = H_{X_1}^2 A = \prod_{i=1}^{r} H_{X_i}$$

ce qui clôt la récurrence. Ainsi

$$\boxed{\text{Toute matrice de } \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est produit d'au plus } n \text{ matrices de Householder.}}$$

9. Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle, notant x_i les coordonnées de X, alors les coordonnées de $X/\|X\|$ sont $\dfrac{x_i}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}}$ et sont continues comme quotients de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. L'application H est à coordonnées polynomiales en les coefficients de X d'où sa continuité. Enfin, l'application P est n-linéaire sur un produit d'espaces de dimension finie ce qui prouve sa continuité. Par composition, on conclut

$$\boxed{\text{L'application } \Phi = P \circ (H, \ldots, H) \circ (N, \ldots, N) \text{ est continue.}}$$

10. On propose l'algorithme :

Algorithme 1 : Génération aléatoire dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Résultat : une matrice $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
$res \leftarrow I_n$
pour $k \in [\![1 ; n]\!]$ **faire**
    $X \leftarrow$ `tirage()`
    $X \leftarrow X/\|X\|$
    $H \leftarrow I_n - 2XX^\top$
    $res \leftarrow res \times H$
retourner res

C'est la démarche proposée dans un article de Francesco Mezzadri (voir section 7) :
`https://arxiv.org/pdf/math-ph/0609050.pdf`