Corrigé de la séance 2 - MP+ - 21/11/25

Exercice 1 (Décomposition de Dunford ****)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ trigonalisable. Montrer qu'il existe un unique couple $(d, n) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})^2$ tel que $u = d + n$ avec $d \circ n = n \circ d$ et d diagonalisable, n nilpotent. Établir également que d et u sont dans $\mathbb{K}[u]$.

Corrigé : Notons $\pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} (\mathrm{X} - \lambda)^{\alpha_\lambda}$. D'après le lemme des noyaux, on a

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\ \pi_u(u) = \mathrm{Ker} \bigcirc_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} (u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^{\alpha_\lambda} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{F}_\lambda \quad \text{avec} \quad \mathrm{F}_\lambda = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^{\alpha_\lambda}$$

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$. On a F_λ stable par u car u commute avec $(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^{\alpha_\lambda} \in \mathbb{K}[u]$. Notant $n_\lambda = u_{\mathrm{F}_\lambda} - \lambda\,\mathrm{id}_{\,\mathrm{F}_\lambda}$, on a $n_\lambda \in \mathscr{L}(\mathrm{F}_\lambda)$ et $n_\lambda^{\alpha_\lambda} = 0$. Il existe $\mathscr{B}_\lambda$ base de F_λ telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_\lambda} n_\lambda$ soit triangulaire supérieure stricte et on concatène ces bases pour former $\mathscr{B} = \bigcup_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathscr{B}_\lambda$ une base de E. On pose

$$d = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \lambda\,\mathrm{id}_{\,\mathrm{F}_\lambda} \quad \text{et} \quad n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} n_\lambda$$

Alors, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} d$ diagonale, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} n$ triangulaire supérieure avec commutation de ces deux matrices en écrivant un produit par blocs ce qui prouve l'existence d'un couple $(d, n) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})^2$ tel que $u = d + n$ avec d diagonalisable , n nilpotent et $d \circ n = n \circ d$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$. Notons $\mathrm{P}_\lambda = \prod_{\mu \in \mathrm{Sp}\,(u) \smallsetminus \{\lambda\}} (\mathrm{X} - \mu)^{\alpha_\mu}$. On a $(\mathrm{X} - \lambda)^{\alpha_\lambda} \wedge \mathrm{P}_\lambda = 1$ d'où l'existence, d'après le théorème de Bezout, de A et B dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{A}(\mathrm{X} - \lambda)^{\alpha_\lambda} + \mathrm{B}\mathrm{P}_\lambda = 1$. Par conséquent, on a

$$\mathrm{id} = \mathrm{A}(u) \circ (u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^{\alpha_\lambda} + \mathrm{B}(u) \circ \mathrm{P}_\lambda(u)$$

d'où pour $x \in \mathrm{E}$
$$x = \underbrace{\mathrm{A}(u) \circ (u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^{\alpha_\lambda}(x)}_{a_\lambda} + \underbrace{\mathrm{B}(u) \circ \mathrm{P}_\lambda(u)(x)}_{b_\lambda}$$

Comme $(\mathrm{X} - \lambda)^{\alpha_\lambda}\mathrm{P}_\lambda = \pi_u$ est annulateur de u, on obtient sans difficulté

$$b_\lambda \in \mathrm{F}_\lambda \quad \text{et} \quad a_\lambda \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}_\lambda(u) = \bigoplus_{\mu \in \mathrm{Sp}\,(u) \smallsetminus \{\lambda\}} \mathrm{F}_\mu$$

et cette décomposition $x = a_\lambda + b_\lambda$ avec $(a_\lambda, b_\lambda) \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}_\lambda(u) \times \mathrm{F}_\lambda$ est unique (unicité établie dans le lemme des noyaux). Ainsi, l'application $p_\lambda = \mathrm{B}(u) \circ \mathrm{P}_\lambda(u) : x \mapsto b_\lambda$ est le projecteur sur F_λ parallèlement à $\bigoplus_{\mu \in \mathrm{Sp}\,(u) \smallsetminus \{\lambda\}} \mathrm{F}_\mu$ et on a donc établi que $p_\lambda \in \mathbb{K}[u]$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$. On vérifie sans difficulté que $d = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \lambda p_\lambda$ ce qui prouve $d \in \mathbb{K}[u]$ et par conséquent $n = u - d \in \mathbb{K}[u]$. Enfin, considérons un autre couple (d', n') solution de la décomposition. Comme d' et n' commutent, alors d' et $u = d' + n'$ commutent et par conséquent d' commute avec tout polynôme en u et en particulier avec d. On a alors d et d' diagonalisables et qui commutent et qui sont donc co-diagonalisables d'où $d - d'$ diagonalisable. De même, on a n et n' qui commutent puis $n - n'$ nilpotent (résultat classique). Ainsi, on a l'égalité $d - d' = n - n'$ avec $d - d'$ diagonalisable et $n - n'$ nilpotent d'où $d - d' = 0$ et $n - n' = 0$ et on conclut

Il existe un unique couple $(d,n) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $u = d+n$ avec d diagonalisable, n nilpotent, $d \circ n = n \circ d$ et de plus d, n dans $\mathbb{K}[u]$.

Remarque : On a montré l'existence et l'unicité de la *décomposition de Dunford*.

Variante : Pour établir que les projecteurs spectraux sont dans $\mathbb{K}[u]$, on peut observer

$$\bigwedge_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{P}_\lambda = 1$$

D'après la relation de Bezout, on dispose d'une famille $(\mathrm{U}_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)}$ dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ telle que

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{U}_\lambda \mathrm{P}_\lambda = 1$$

On pose $\qquad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad p_\lambda = (\mathrm{U}_\lambda \mathrm{P}_\lambda)(u)$

D'après la relation de Bezout, il vient

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} p_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} (\mathrm{U}_\lambda \mathrm{P}_\lambda)(u) = \mathrm{id}$$

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}\,(u)^2$ avec $\lambda \neq \mu$. On a $(\mathrm{X}-\mu)^{\alpha_\mu}$ diviseur de P_λ puis

$$p_\lambda \circ p_\mu = (\mathrm{U}_\lambda \mathrm{P}_\lambda \mathrm{U}_\mu \mathrm{P}_\mu)(u) = (\ldots \times (\mathrm{X}-\mu)^{\alpha_\mu} \mathrm{P}_\mu)(u) = (\ldots \times \pi_u)(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

puis $\qquad p_\mu = p_\mu \circ \left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} p_\lambda \right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \underbrace{p_\mu \circ p_\lambda}_{=0 \text{ si } \lambda \neq \mu} = p_\mu^2$

ce qui prouve que les $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)}$ sont des projecteurs. On vérifie sans difficulté

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad \mathrm{Im}\, p_\lambda \subset \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^{\alpha_\lambda} = \mathrm{F}_\lambda$$

Puis $\qquad \mathrm{E} = \mathrm{id}\,(\mathrm{E}) = \mathrm{Im} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} p_\lambda \subset \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{Im}\, p_\lambda \subset \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{F}_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} = \mathrm{E}$

On en déduit que toutes les inclusions sont des égalités et en particulier

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad \mathrm{Im}\, p_\lambda = \mathrm{F}_\lambda$$

Enfin, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$, on a

$$p_\lambda(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}\,(u)} p_\mu(x) = \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}\,(u) \smallsetminus \{\lambda\}} p_\mu(x) \in \bigoplus_{\mu \in \mathrm{Sp}\,(u) \smallsetminus \{\lambda\}} \mathrm{F}_\mu$$

d'où $\qquad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad \mathrm{Ker}\, p_\lambda \subset \bigoplus_{\mu \in \mathrm{Sp}\,(u) \smallsetminus \{\lambda\}} \mathrm{F}_\mu$

avec égalité pour raison de dimension en écrivant par exemple le théorème du rang avec p_λ. Ainsi, la famille des projecteurs $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)}$ est la famille de projecteurs associée à la décomposition $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{F}_\lambda$ et on en déduit alors

$$d = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \lambda p_\lambda$$

en considérant l'écriture triangulaire par blocs dans une base adaptée à cette décomposition. On conclut ensuite comme précédemment.

Remarque : On peut aussi poser $d = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \lambda p_\lambda$ puis

$$n = u - d = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} (u - \lambda\,\mathrm{id}\,) \circ p_\lambda$$

et établir le caractère nilpotent de n en observant pour p entier

$$n^p = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} (u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^p \circ p_\lambda$$

Exercice 2 (Suites récurrentes linéaires *)**

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(u_n)_n$ suite récurrente linéaire d'ordre p (entier non nul) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \ldots + a_0 u_n$$

avec $a_0, \ldots, a_{p-1}$ des scalaires et $a_0 \neq 0$. On note $\mathrm{P} = \mathrm{X}^p - \sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k \mathrm{X}^k$ et on suppose P scindé dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ de la forme $\mathrm{P} = \prod\limits_{i=1}^{r} (\mathrm{X} - \lambda_i)^{m_i}$ avec les λ_i deux à deux distincts et les m_i des entiers non nuls. On note $\sigma : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n$ et $\Delta = \sigma - \mathrm{id}$.

1. Justifier que $\sigma \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis interpréter $\mathrm{S_H}$ à l'aide de $\mathrm{P}(\sigma)$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et m entier non nul. On note $e_\lambda = (\lambda^n)_n$ et pour $u \in \mathrm{E}$, on note $u = e_\lambda y$ avec $y \in \mathrm{E}$. Enfin, pour k entier, on pose $r_k = (n^k)_n$ et $\mathrm{F}_k = \mathrm{Vect}\,(r_0, \ldots, r_k)$.
   (a) Justifier que y est bien définie puis établir
   $$u \in \mathrm{Ker}\,(\sigma - \lambda\,\mathrm{id})^m \iff y \in \mathrm{Ker}\;\Delta^m$$
   (b) Établir $$\mathrm{F}_{m-1} \subset \mathrm{Ker}\;\Delta^m$$
   (c) Conclure que l'inclusion précédente est une égalité.
3. En déduire que $(n \mapsto n^j \lambda_i^n, i \in [\![1\,;\, r]\!], j \in [\![0\,;\, m_i - 1]\!])$ est une base de $\mathrm{S_H}$.

Corrigé : 1. On a clairement σ linéaire et à valeurs dans E et sans difficulté, il vient

$$\boxed{\sigma \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \quad \text{et} \quad \mathrm{S_H} = \mathrm{Ker}\;\mathrm{P}(\sigma)}$$

2.(a) La suite y est bien définie par $y = e_{\lambda^{-1}} u$. On observe

$$(\sigma - \lambda\,\mathrm{id})(u) = \lambda e_\lambda \Delta(y)$$

et par récurrence $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad (\sigma - \lambda\,\mathrm{id})^k(u) = \lambda^k e_\lambda \Delta^k(y)$$

Ainsi $$\boxed{u \in \mathrm{Ker}\,(\sigma - \lambda\,\mathrm{id})^m \iff y \in \mathrm{Ker}\;\Delta^m}$$

Remarque : Poser $u = e_\lambda y$ est l'analogue discret de la variation de la constante puisque $\mathrm{Ker}\,(\sigma - \lambda\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,(e_\lambda)$.

2.(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $$\Delta(r_k)(n) = (n+1)^k - n^k = \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} n^\ell$$

d'où $\Delta(r_k) \in \mathrm{F}_{k-1}$ et par suite $\Delta(\mathrm{F}_k) \subset \mathrm{F}_{k-1}$ et par récurrence $\Delta^\ell(\mathrm{F}_k) \subset \mathrm{F}_{k-\ell}$ pour tout $\ell \in [\![0\,;\, k]\!]$ d'où $\Delta^{k+1}(\mathrm{F}_k) \subset \Delta(\mathrm{F}_0) = \{0_\mathrm{E}\}$. En particulier, on a $\Delta^m(\mathrm{F}_{m-1}) = \{0_\mathrm{E}\}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathrm{F}_{m-1} \subset \mathrm{Ker}\;\Delta^m}$$

2.(c) L'espace $\mathrm{Ker}\;\Delta^m$ est l'ensemble des suites récurrentes linéaires d'ordre m vérifiant une certaine relation de récurrence linéaire. Etant donné un choix de m scalaires, il existe, par principe de récurrence une suite dans $\mathrm{Ker}\;\Delta^m$ ayant pour m premiers termes ces m scalaires et toujours par principe de récurrence, une telle suite est unique ce qui revient à dire que $\Phi : \mathrm{Ker}\;\Delta^m \to \mathbb{K}^m, (u_n)_n \mapsto (u_0, \ldots, u_{m-1})$ est un isomorphisme et par conséquent $\dim \mathrm{Ker}\;\Delta^m = m = \dim \mathrm{F}_{m-1}$. Par inclusion et égalité des dimensions, on conclut

$$\boxed{\mathrm{F}_{m-1} = \mathrm{Ker}\;\Delta^m}$$

Remarque : Il faut comprendre l'opérateur comme une dérivée « discrète ». Ainsi, les suites dont la dérivée discrète d'ordre m est nulle sont les suites polynomiales d'ordre inférieur.

3. D'après le lemme des noyaux, il vient

$$\mathrm{S_H} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,(\sigma - \lambda_i\,\mathrm{id}\,)^{m_i}$$

avec les λ_i des scalaires non nuls puisque $a_0 \neq 0$ et les m_i des entiers non nuls. D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\forall i \in [\![\,1\,;\,r\,]\!] \qquad (n \mapsto n^j \lambda_i^n, k \in [\![\,0\,;\,m_i - 1\,]\!]) \text{ base de } \mathrm{Ker}\,(\sigma - \lambda_i\,\mathrm{id}\,)^{m_i}$$

On conclut

$$\boxed{\text{La famille } (n \mapsto n^j \lambda_i^n, i \in [\![\,1\,;\,r\,]\!], j \in [\![\,0\,;\,m_i - 1\,]\!]) \text{ est une base de } \mathrm{S_H}.}$$

Exercice 3 (Trigonalisation simultanée ***)

Soient A, B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables, c'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ et $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ sont triangulaires supérieures.

Corrigé : La matrice A admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ puisque χ_{A} est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Le sous-espace propre $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ est stable par B et l'endomorphisme b_λ induit par B sur $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ admet lui aussi une valeur propre μ pour la même raison que précédemment. Considérant X matrice colonne d'un vecteur propre de l'endomorphisme b_λ, on a

$$\mathrm{BX} = \mu \mathrm{X} \quad \text{et} \quad \mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$$

Ainsi, les matrices A et B admettent un vecteur propre commun. On procède ensuite par récurrence en notant

$$\mathscr{P}(n): \quad \forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2 \quad \mathrm{AB} = \mathrm{BA} \quad \Longrightarrow \quad \exists \mathrm{S} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{C}) \mid (\mathrm{S}^{-1}\mathrm{AS}, \mathrm{S}^{-1}\mathrm{BS}) \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{C})^2$$

- $\mathscr{P}(1)$: l'initialisation est évidente.
- $\mathscr{P}(n-1) \Longrightarrow \mathscr{P}(n)$ Supposons $\mathscr{P}(n-1)$ vraie pour $n \geqslant 2$ fixé. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ avec $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$. D'après le résultat préliminaire, il existe ε_1 vecteur propre commun à A et B. En complétant (ε_1) en base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{C}^n$, notant $\mathrm{P} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$, on obtient les matrices par blocs

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & \mathrm{A}' \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = \left(\begin{array}{c|c} \mu & * \\ \hline 0 & \mathrm{B}' \end{array}\right)$$

où le symbole $*$ désigne des termes qu'il n'est pas utile de préciser. Le produit par blocs donne

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & \mathrm{A}' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mu & * \\ \hline 0 & \mathrm{B}' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda\mu & * \\ \hline 0 & \mathrm{A}'\mathrm{B}' \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{c|c} \mu & * \\ \hline 0 & \mathrm{B}' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & \mathrm{A}' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mu\lambda & * \\ \hline 0 & \mathrm{B}'\mathrm{A}' \end{array}\right)$$

Comme A et B commutent, il s'ensuit que les matrices de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ A' et B' commutent. D'après l'hypothèse $\mathscr{P}(n-1)$, il existe $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{A}' = \mathrm{QTQ}^{-1}$ et $\mathrm{B}' = \mathrm{QSQ}^{-1}$ avec $(\mathrm{T}, \mathrm{S}) \in \mathscr{T}_{n-1}^+(\mathbb{C})^2$. Enfin, posant $\mathrm{R} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Q} \end{array}\right)$, on a clairement $\mathrm{R} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ avec $\mathrm{R}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Q}^{-1} \end{array}\right)$. Le produit par blocs donne

$$\mathrm{R}^{-1}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP})\mathrm{R} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{A}'\mathrm{Q} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & \mathrm{T} \end{array}\right)$$

et

$$\mathrm{R}^{-1}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP})\mathrm{R} = \left(\begin{array}{c|c} \mu & * \\ \hline 0 & \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{B}'\mathrm{Q} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mu & * \\ \hline 0 & \mathrm{S} \end{array}\right)$$

Ainsi

$$((\mathrm{PR})^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{PR}), (\mathrm{PR})^{-1}\mathrm{B}(\mathrm{PR})) \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{C})^2$$

ce qui clôt la récurrence. On a donc prouvé

$$\boxed{\text{Deux matrices de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \text{ qui commutent sont simultanément trigonalisables.}}$$

Remarque : Le résultat se généralise à une famille de matrices $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ qui commutent. L'espace $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est de dimension finie et admet une base qu'on note $(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p)$. Par récurrence sur p, on montre qu'il existe un vecteur propre commun à A_1, …, A_p. Puis, par une récurrence sur n identique à celle présentée plus haut, on montre que les matrices sont simultanément trigonalisables.

Exercice 4 (****)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$ et on pose $\Phi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} + \mathrm{MB}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Justifier que $\Phi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis montrer que les matrice A et B sont trigonalisables si et seulement si l'endomorphisme Φ l'est.

Corrigé : L'application Φ est linéaire par bilinéarité du produit matriciel et clairement à valeurs dans E d'où

$$\boxed{\Phi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

On pose $$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad f(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} \quad \text{et} \quad g(\mathrm{M}) = \mathrm{MB}$$

Pour les mêmes raisons qu'avec Φ, les applications f et g sont des endomorphismes de E. On remarque

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad f \circ g(\mathrm{M}) = \mathrm{AMB} = g \circ f(\mathrm{M})$$

Par ailleurs, on observe que pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on a

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{P}(f)(\mathrm{M}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{M} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(g)(\mathrm{M}) = \mathrm{MP}(\mathrm{B})$$

ce qui prouve que les polynômes annulateurs de A et de f coïncident et de même pour B et g. Supposons les matrices A et B trigonalisables. Les polynômes caractéristiques χ_{A} et χ_{B} sont scindés dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, annulateurs respectivement de A et de B donc de f et de g ce qui prouve que les endomorphismes f et g sont trigonalisables. Comme ils commutent, il existe une base de trigonalisation simultanée ce qui prouve que l'endomorphisme Φ est trigonalisable. On considère A et B comme matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et Φ comme endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On a $\chi_{\mathrm{B}} = \chi_{{}^t\mathrm{B}}$ par propriété du déterminant et par conséquent, on dispose de X et Y dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \smallsetminus \{0\}$ telles que $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ et $\mathrm{B}^\top\mathrm{Y} = \mu\mathrm{Y}$ ou encore $\mathrm{Y}^\top\mathrm{B} = \mu\mathrm{Y}^\top$. Posant $\mathrm{M} = \mathrm{XY}^\top = \big(x_iy_j\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ non nulle puisqu'il existe $(i_0, j_0) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ tel que $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$, on trouve

$$\Phi(\mathrm{M}) = \mathrm{AXY}^\top + \mathrm{XY}^\top\mathrm{B} = \lambda\mathrm{XY}^\top + \mathrm{X}\mu\mathrm{Y}^\top = (\lambda + \mu)\mathrm{M}$$

ce qui prouve $$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) + \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{B}) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\Phi)$$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \smallsetminus \{0\}$ tels que $\Phi(\mathrm{M}) = \alpha\mathrm{M}$. On a

$$\Phi(\mathrm{M}) = \alpha\mathrm{M} \iff \mathrm{AM} = \mathrm{MC} \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} = \alpha\mathrm{I}_n - \mathrm{B}$$

Supposons $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{C}) = \varnothing$. Par récurrence, on montre $\mathrm{A}^k\mathrm{M} = \mathrm{MC}^k$ pour tout k entier d'où $\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{M} = \mathrm{MP}(\mathrm{C})$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. En particulier, il vient

$$\mathrm{M}\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{C}) = \chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A})\mathrm{M} = 0$$

Notant $\chi_{\mathrm{A}} = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} (\mathrm{X} - \lambda)^{m_\lambda(\mathrm{A})}$, on a

$$\det \chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{C}) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} \det(\mathrm{C} - \lambda\mathrm{I}_n)^{m_\lambda(\mathrm{A})} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} \big((-1)^n\chi_{\mathrm{C}}(\lambda)\big)^{m_\lambda(\mathrm{A})} \neq 0$$

La matrice $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})$ étant inversible, il s'ensuit $\mathrm{M} = 0$ ce qui est faux.
Ceci prouve l'existence d'une valeur propre commune $\lambda \in \mathbb{C}$ pour A et C. Ainsi, on dispose de $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle telle que $\mathrm{CX} = \lambda\mathrm{X}$, c'est-à-dire $\mathrm{BX} = (\alpha - \lambda)\mathrm{X}$ et par conséquent

$$\alpha = \underbrace{\lambda}_{\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})} + \underbrace{\alpha - \lambda}_{\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{B})}$$

Par double inclusion, on a donc établi

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\Phi) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) + \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{B})$$

Les matrices A et B sont trigonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et d'après le résultat démontré précédemment, l'application Φ vu comme endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable et avec la relation sur les spectres, il vient

$$\chi_\Phi = \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} (\mathrm{X} - \lambda_i - \mu_j)$$

avec λ_i, μ_j les valeurs propres de A et B répétées avec leurs multiplicités. On considère de nouveau l'application Φ comme endomorphisme du $\mathbb{K}$-ev E et on le suppose trigonalisable. Le polynôme caractéristique χ_Φ est scindé dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ ce qui prouve que $\lambda_i + \mu_j \in \mathbb{K}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$. Enfin, comme on a $\mathrm{Tr}\ \mathrm{B} \in \mathbb{K}$, il vient

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \lambda_i = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} (\lambda_i + \mu_j) - \mathrm{Tr}\ \mathrm{B}\right) \in \mathbb{K}$$

et de même pour les μ_j. Par conséquent, les polynômes $\chi_\mathrm{A} = \prod_{i=1}^{n}(\mathrm{X} - \lambda_i)$ et $\chi_\mathrm{B} = \prod_{j=1}^{n}(\mathrm{X} - \mu_j)$ sont scindés dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et il s'ensuit que les matrices A et B sont trigonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On conclut

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \Phi \text{ est trigonalisable si et seulement si les matrices A et B le sont.}}$$

Remarques :(a) On a notamment prouvé le résultat auxiliaire suivant :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\Phi) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) + \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{B})$$

(b) Pour déduire de $\mathrm{AM} = \mathrm{MC}$ avec $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{C}) \neq \varnothing$, on peut aussi procéder comme suit. On note $r = \mathrm{rg}\ \mathrm{M}$. On dispose de P et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{M} = \mathrm{PJ}_r\mathrm{Q}$ d'où

$$\mathrm{A}'\mathrm{J}_r = \mathrm{J}_r\mathrm{C}' \quad \text{avec} \quad \mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}'_1 & \mathrm{A}'_2 \\ \hline \mathrm{A}'_3 & \mathrm{A}'_4 \end{array}\right) \quad \mathrm{C}' = \mathrm{QCQ}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{C}'_1 & \mathrm{C}'_2 \\ \hline \mathrm{C}'_3 & \mathrm{C}'_4 \end{array}\right)$$

Le calcul par blocs donne $\mathrm{A}'_1 = \mathrm{C}'_1$, $\mathrm{A}'_3 = 0$ et $\mathrm{C}'_2 = 0$ d'où $\chi_{\mathrm{A}'_1} | \chi_{\mathrm{A}'}$, $\chi_{\mathrm{C}'_1} | \chi_{\mathrm{C}'}$ avec $\chi_{\mathrm{A}'_1} = \chi_{\mathrm{C}'_1}$ et $\chi_\mathrm{A} = \chi_{\mathrm{A}'}$, $\chi_\mathrm{C} = \chi_{\mathrm{C}'}$ par similitude. Ceci prouve que χ_A et χ_C ont un facteur commun de degré $r \geqslant 1$ d'où le résultat.

Exercice 5 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n entier non nul et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Pour $x \in \mathrm{E}$, on pose

$$\mathrm{E}_x = \operatorname{Vect}\left(u^k(x),\, k \in \mathbb{N}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_x = \{\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(u)(x) = 0_{\mathrm{E}}\}$$

L'endomorphisme u est dit *cyclique* s'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{E}_x = \mathrm{E}$. On définit le *commutant* de u noté $\mathscr{C}(u)$ par

$$\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid u \circ v = v \circ u\}$$

1. Soit $x \in \mathrm{E}$. Justifier qu'il existe un polynôme unitaire $\pi_{u,x} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{I}_x = \pi_{u,x}\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et vérifiant $\pi_{u,x}|\pi_u$.
2. (a) On suppose $\pi_u = \mathrm{P}^\alpha$ avec $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ irréductible et α entier non nul. Établir qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\pi_{u,x} = \pi$.
   (b) Généraliser le résultat précédent avec π_u quelconque. On pourra considérer sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
3. En déduire $\qquad u$ cyclique $\iff \pi_u = \chi_u$
4. On suppose u trigonalisable.
   (a) Établir $\qquad \dim \mathscr{C}(u) \geqslant n$
   (b) En déduire $\qquad \pi_u = \chi_u \iff \mathbb{K}[u] = \mathscr{C}(u)$

Corrigé : 1. L'ensemble I_x est un idéal de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, non réduit à $\left\{0_{\mathbb{K}[\mathrm{X}]}\right\}$ car il contient π_u. Ainsi

$$\boxed{\text{Il existe } \pi_{u,x} \text{ unitaire engendrant } \mathrm{I}_x \text{ et donc diviseur de } \pi_u.}$$

2.(a) On a $\mathrm{P}^{\alpha-1}(u) \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$. On dispose donc de $x \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{P}^{\alpha-1}(u)(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$. Comme $\pi_{u,x}$ divise $\pi_u = \mathrm{P}^\alpha$ avec P irréductible, alors on a $\pi_{u,x} = \mathrm{P}^s$ avec $s \leqslant \alpha$. Or, par choix de x, on a $\mathrm{P}^{\alpha-1}(u)(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$ d'où $s \geqslant \alpha$ et par conséquent

$$\boxed{\text{Il existe } x \in \mathrm{E} \text{ tel que } \pi_{u,x} = \pi_u.}$$

2.(b) On décompose $\pi_u = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{P}_i^{\alpha_i}$ avec r entier non nul, les P_i dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ irréductibles unitaires deux à deux distincts et les α_i entiers non nuls. Les $\mathrm{P}_i^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux. D'après le lemme des noyaux, il vient

$$\mathrm{E} = \operatorname{Ker}\, \pi_u(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\, \mathrm{P}_i^{\alpha_i}(u)$$

On note $u_i \in \mathscr{L}(\mathrm{E}_i)$ l'induit par u sur $\mathrm{E}_i = \operatorname{Ker}\, \mathrm{P}_i^{\alpha_i}(u)$ stable par u pour $i \in [\![1\,;\,r]\!]$. On a $\mathrm{P}_i^{\alpha_i}(u_i) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E}_i)}$ pour tout $i \in [\![1\,;\,r]\!]$ par construction. Comme l'endomorphisme u est caractérisé par ses restrictions et donc ses induits sur les E_i pour $i \in [\![1\,;\,r]\!]$, s'il existe $j \in [\![1\,;\,r]\!]$ tel que $\mathrm{P}_j^{\alpha_j-1}(u_j) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E}_j)}$, alors on aurait $\mathrm{P}_j^{\alpha_j-1} \prod_{i\in[\![1\,;\,r]\!]\smallsetminus\{j\}} \mathrm{P}_i^{\alpha_i}$ annulateur de u ce qui contredirait la minimalité de π_u. On en déduit

$$\forall i \in [\![1\,;\,r]\!] \qquad \pi_{u_i} = \mathrm{P}_i^{\alpha_i}$$

Ainsi, d'après le résultat de la question précédente, on a

$$\forall i \in [\![1\,;\,r]\!] \qquad \exists x_i \in \mathrm{E}_i \quad | \quad \pi_{u_i,x_i} = \pi_{u_i}$$

On pose $$x = \sum_{i=1}^{r} x_i$$

On a $$\pi_{u,x}(u)(x) = \sum_{i=1}^{r} \pi_{u,x}(u)(x_i) = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\pi_{u,x}(u_i)(x_i)}_{\in \mathrm{E}_i} = 0_{\mathrm{E}}$$

Par somme directe, il vient
$$\forall i \in [\![1 \,;\, r]\!] \qquad \pi_{u,x}(u_i)(x_i) = 0_{\mathrm{E}_i}$$

d'où $$\forall i \in [\![1 \,;\, r]\!] \qquad \mathrm{P}_i^{\alpha_i} = \pi_{u_i,x_i} | \pi_{u,x}$$

Comme les $\mathrm{P}_i^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux, il s'ensuit que $\pi_u = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{P}_i^{\alpha_i}$ divise $\pi_{u,x}$ et on sait que $\pi_{u,x}$ divise π_u. Ainsi, les deux polynômes sont associés et unitaires et on conclut

$$\boxed{\text{Il existe } x \in \mathrm{E} \text{ tel que } \pi_{u,x} = \pi_u.}$$

3. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On dispose d'un unique couple $(\mathrm{Q}, \mathrm{R}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2$ avec $\deg \mathrm{R} < \deg \pi_{u,x}$ tel que $\mathrm{P} = \mathrm{Q}\pi_{u,x} + \mathrm{R}$. Il vient
$$\mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{Q}(u) \circ \pi_{u,x}(u)(x) + \mathrm{R}(u)(x) = \mathrm{R}(u)(x)$$
ce qui prouve que $(u^k(x))_{k \in [\![0 \,;\, \deg \pi_{u,x} - 1]\!]}$ est génératrice de E_x et libre car $\mathrm{R}(u)(x) = 0$ avec $\deg \mathrm{R} < \deg \pi_{u,x}(x)$ et R non nul contredit la minimalité de $\pi_{u,x}$. Ainsi, on a
$$\dim \mathrm{E}_x = \deg \pi_{u,x}$$
Si l'endomorphisme u est cyclique, on dispose de $x \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{E}_x = \mathrm{E}$ d'où
$$\deg \chi_u = \dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{E}_x = \deg \pi_{u,x}$$
Ainsi, on a $\pi_{u,x}$ divise π_u qui divise χ_u et ces polynômes sont unitaires et de même degré d'où $\pi_u = \chi_u$. Réciproquement, si $\pi_u = \chi_u$, on dispose de $x \in \mathrm{E}$ tel que $\pi_{u,x} = \pi$ d'où
$$\dim \mathrm{E}_x = \deg \pi_{u,x} = \deg \pi_u = \deg \chi_u = \dim \mathrm{E}$$
On en déduit $\mathrm{E}_x = \mathrm{E}$. On a donc montré
$$\boxed{u \text{ cyclique} \iff \pi_u = \chi_u}$$

4.(a) Soit $\mathscr{B}$ une base de trigonalisation de u et $\mathrm{T} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u \in \mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ (espace des matrices triangulaires supérieures). Notant
$$\mathscr{C}(\mathrm{T}) = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad | \quad \mathrm{MT} = \mathrm{TM}\}$$
on a clairement $\dim \mathscr{C}(\mathrm{T}) = \dim \mathscr{C}(f)$. Considérons la dimension de l'espace de solutions de l'équation
$$\mathrm{MT} - \mathrm{TM} = 0 \tag{S}$$
d'inconnue $\mathrm{M} \in \mathrm{T}_n(\mathbb{K})$. Les termes diagonaux donnent les équations triviales
$$\forall i \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad m_{i,i}t_{i,i} - t_{i,i}m_{i,i} = 0$$
Par conséquent, le système (S) possède $\dfrac{n(n+1)}{2} - n$ équations pour $\dfrac{n(n+1)}{2}$ inconnues. Comme le rang de (S) est majorée par le nombre d'équations, il s'ensuit
$$\dim \mathscr{C}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{T}_n(\mathbb{K}) \geqslant \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right) \geqslant n$$

Ainsi $$\boxed{\dim \mathscr{C}(u) = \dim \mathscr{C}(\mathrm{T}) \geqslant \dim \mathscr{C}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{T}_n(\mathbb{K}) \geqslant n}$$

4.(b) Si $\pi_u = \chi_u$, comme on dispose de $x \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{E} = \mathrm{E}_x$, on vérifie sans difficulté (exercice classique) que $\mathbb{K}[u] = \mathscr{C}(u)$. Supposons $\mathbb{K}[u] = \mathscr{C}(u)$. On a

$$\deg \pi_u = \dim \mathbb{K}[u] \leqslant n \leqslant \dim \mathscr{C}(u)$$

Les inégalités sont donc des égalité et comme π_u divise χ_u et que ceux-ci sont de même degré et unitaires, ils sont égaux. On conclut

$$\boxed{\pi_u = \chi_u \iff \mathbb{K}[u] = \mathscr{C}(u)}$$

Exercice 6 (****)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathscr{S}(\mathrm{A})$ la classe de similitude de A, *i.e.*

$$\mathscr{S}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \quad | \quad \mathrm{M} \text{ semblable à A}\}$$

1. Montrer que si A est inversible, alors $\overline{\mathscr{S}(\mathrm{A})} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. Montrer $\qquad$ A diagonalisable $\iff$ $\mathscr{S}(\mathrm{A})$ fermée

Corrigé : 1. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $(\mathrm{B}_n)_n \in \mathscr{S}(\mathrm{A})^{\mathbb{N}}$ avec $\mathrm{B}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{B}$. Le déterminant est continu et invariant par similitude d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \det \mathrm{A} = \det \mathrm{B}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \det \mathrm{B} = \det \mathrm{A} \qquad \Longrightarrow \det \mathrm{B} = \det \mathrm{A} \neq 0$$

Ainsi $\qquad \boxed{\overline{\mathscr{S}(\mathrm{A})} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$

2. Supposons A diagonalisable. Soit $(\mathrm{B}_n)_n \in \mathscr{S}(\mathrm{A})^{\mathbb{N}}$ avec $\mathrm{B}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{B}$. Comme B_n est semblable à A pour tout n entier, on a $\pi_{\mathrm{B}_n} = \pi_{\mathrm{A}}$ et par suite

$$\pi_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{B}_n) = 0 = \pi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 0$$

Comme A est diagonalisable, π_{A} scindé à racines simples et π_{A} est annulateur de B, donc par théorème, la matrice B est diagonalisable. Par continuité de $\mathrm{M} \mapsto \chi_{\mathrm{M}}$, on a $\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{B}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \chi_{\mathrm{B}} = \chi_{\mathrm{A}}$. Ainsi, les matrices A et B sont diagonalisables avec même polynômes caractéristiques donc même valeurs propres et mêmes multiplicités pour les valeurs propres. Il s'ensuit que A et B sont semblables à une même matrice diagonale et donc semblables entre elles. Ceci prouve que $\mathrm{B} \in \mathscr{S}(\mathrm{A})$. Réciproquement, supposons $\mathscr{S}(\mathrm{A})$ fermée. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à A et soit $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de trigonalisation de u. On note $\mathscr{B}_k = (\varepsilon_1, \varepsilon_2/k, \ldots, \varepsilon_n/k^{n-1})$. Ainsi

$$\forall j \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad u\left(\frac{\varepsilon_j}{k^{j-1}}\right) = \lambda_j \frac{\varepsilon_j}{k^{j-1}} + \sum_{i=1}^{j-1} \underbrace{\frac{\alpha_{i,j}}{k^{j-i}}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} 0} \frac{\varepsilon_i}{k^{i-1}}$$

où les λ_j désignent les valeurs propres de u et les $\alpha_{i,j}$ les coefficients au dessus de la diagonale dans $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$. On en déduit

$$\mathrm{A}_k = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_k} u \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

La suite $(\mathrm{A}_k)_k$ est à valeurs dans $\mathscr{S}(\mathrm{A})$ puisque les A_k et A sont matrices d'un même endomorphisme dans des bases distinctes et $\mathrm{A}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{D}$ d'où D semblable à A par fermeture de $\mathscr{S}(\mathrm{A})$. On conclut

$$\boxed{\text{A diagonalisable} \iff \mathscr{S}(\mathrm{A}) \text{ fermée}}$$

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Déterminer la nature topologique de

$$\Lambda = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n \quad | \quad (x_1, \ldots, x_n) \text{ libre }\}$$

Corrigé : Soit $(x^{(k)})_k = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})_k \in (\mathrm{E} \smallsetminus \Lambda)^{\mathbb{N}}$ convergente de limite $x \in \mathrm{E}$. Montrons $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \Lambda$ ce qui prouvera la fermeture de $\mathrm{E} \smallsetminus \Lambda$ et donc l'ouverture de Λ. Pour tout k entier, il existe $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \ldots, \lambda_n^{(k)}) \in \mathbb{K}^n \smallsetminus \{0\}$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^{(k)} x_i^{(k)} = 0$. Pour tout k entier, on pose $\alpha^{(k)} = \dfrac{\lambda^{(k)}}{\|\lambda^{(k)}\|}$. La suite $(\alpha^{(k)})_k$ est à valeurs dans $\mathrm{S}(0,1)$ qui est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ donc un compact de $\mathbb{R}^n$. Par conséquent, il existe une extractrice φ telle que $\alpha^{(\varphi(k))} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \in \mathrm{S}(0,1)$. On a $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} x_i^{(k)} = 0$ pour tout k entier et par combinaison linéaire de limites, il vient

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(\varphi(k))} x_i^{(\varphi(k))} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

d'où $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ ce qui prouve $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \Lambda$ d'où la fermeture de $\mathrm{E} \smallsetminus \Lambda$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \Lambda \text{ est un ouvert de } \mathrm{E}^n.}$$

Variante : Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \Lambda$. On pose

$$\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R},\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\|$$

et on note
$$\mathrm{S} = \left\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad | \quad \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = 1\right\}$$

On a S compact de $\mathbb{K}^n$ (fermé borné en dimension finie) et $\Phi \in \mathscr{C}(\mathbb{K}^n, \mathbb{R})$ (composée de la norme avec une application linéaire en dimension finie) admet donc un minimum sur S. Par liberté de $(x_1, \ldots, x_n)$, il s'ensuit que $\operatorname*{Min}_{\mathrm{S}} \Phi > 0$. Soit $\varepsilon \in \left]0\,; \operatorname*{Min}_{\mathrm{S}} \Phi\right[$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{E}^n$ tel que $\|x_i - y_i\| < \varepsilon$ pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$. Supposons qu'il existe $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n \smallsetminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i y_i = 0_{\mathrm{E}}$. Il vient

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i = 0_{\mathrm{E}} \iff \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (x_i - y_i)$$

Par inégalité triangulaire

$$\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|\,\|x_i - y_i\| \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|$$

Notant $\gamma_i = \beta_i / \|\beta\|_1$ pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$, on obtient

$$\Phi(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \|\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i\| \leqslant \varepsilon \quad \text{avec} \quad (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathrm{S}$$

ce qui est absurde par choix de ε. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i = 0_{\mathrm{E}} \quad \Longrightarrow \quad \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$$

On retrouve le résultat attendu.

Exercice 8 (****)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continue surjective. Montrer que pour tout a réel, l'ensemble $f^{-1}(\{a\})$ n'est pas compact.

Corrigé : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continue surjective. Soit a réel tel que $f^{-1}(\{a\})$ est compact. Alors, il existe $\mathrm{R} \geqslant 0$ tel que $f^{-1}(\{a\}) \subset \mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$. Pour la suite, on note

$$\mathrm{B_R} = \mathrm{B}_f(0, \mathrm{R}) \quad \text{et} \quad \mathrm{C_R} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$$

On a $\mathrm{C_R}$ connexe par arcs. Soit $(u, v) \in \mathrm{C_R}^2$. On confond $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. On note

$$u = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \qquad v = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$$

avec θ_1, θ_2 réels et r_1, r_2 dans $]\,\mathrm{R}\,;+\infty\,[$. On pose

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \varphi(t) = r_1^{1-t} r_2^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}((1-t)\theta_1 + t\theta_2)}$$

L'application φ est continue avec $\varphi(0) = u$, $\varphi(1) = v$ et

$$\forall t \in \,]\,0\,;1\,[\qquad |\varphi(t)| = r_1^{1-t} r_2^t > \mathrm{R}^{1-t}\mathrm{R}^t = \mathrm{R}$$

ce qui prouve que φ est à valeurs dans $\mathrm{C_R}$.

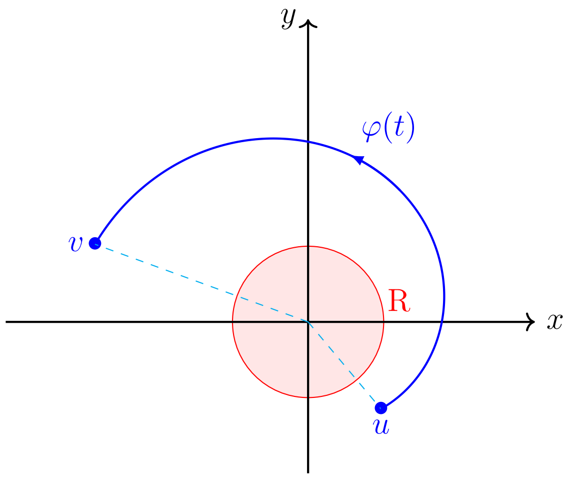

FIGURE 1 – Chemin reliant u à v dans $\mathrm{C_R}$

L'image $f(\mathrm{C_R})$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$ autrement dit un intervalle de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas a donc

$$\varphi(\mathrm{C_R}) \subset \,]\,a\,;+\infty\,[\quad \text{ou} \quad \varphi(\mathrm{C_R}) \subset \,]\,-\infty\,;a\,[$$

Enfin, on a $f(\mathrm{B_R}) \subset [\,-b\,;b\,]$ avec $b \geqslant 0$ puisque $f(\mathrm{B_R})$ est un compact. Donc, avec $f(\mathbb{R}^2) = f(\mathrm{B_R}) \cup f(\mathrm{C_R})$, on trouve

$$f(\mathbb{R}^2) \subset [\,\min(a, -b)\,;+\infty\,[\quad \text{ou} \quad f(\mathbb{R}^2) \subset \,]\,-\infty\,;\max(a, b)\,]$$

Dans tous les cas, ceci contredit la surjectivité de f.

Variante : Par construction, on a $a \in f(\mathrm{B_R})$ et $f(\mathrm{B_R})$ est un compact. Soient c, d dans $\mathbb{R} \setminus f(\mathrm{B_R})$ avec $c < a < d$. Par surjectivité, il existe α, β dans $\mathbb{R}^2$ tels que $f(\alpha) = c$ et $f(\beta) = d$ et par choix de c et d, on a α et β dans $\mathrm{C_R}$. Comme $\mathrm{C_R}$ est connexe par arcs, il existe $\varphi \in \mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathrm{C_R})$ telle que $\varphi(0) = c$ et $\varphi(1) = d$. Puis, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a

$$[\,c\,;d\,] = [\,f \circ \varphi(0)\,; f \circ \varphi(1)\,] \subset f \circ \varphi([\,0\,;1\,]) \subset f(\mathrm{C_R})$$

Comme $a \in [\,c\,;d\,]$, et $a \notin f(\mathrm{C_R})$, on a une contradiction.