Corrigé de la séance 4 - MP+ - 23/01/26

Exercice 1 (****)

Soit E euclidien. On n'utilisera pas le théorème spectral au cours de ce problème. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est dit *normal* si u et u^* commutent.

1. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ normal et F un sev de E stable par u. Montrer que F est stable par u^*, $\mathrm{F}^\perp$ stable par u et u^* et que u_F est normal.
2. On suppose que $\dim \mathrm{E} = 2$. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ normal sans valeur propre réelle. Dans $\mathscr{B}$ base orthonormée de E, montrer que

$$\mathrm{mat}_\mathscr{B} u = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

3. Plus généralement, montrer que pour $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ normal, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice $\mathrm{mat}_\mathscr{B} u$ est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux du type

$$(\lambda) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (a_i, b_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

Corrigé : 1. Dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{F} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{F}^\perp$, on a

$$\mathrm{M} = \mathrm{mat}_\mathscr{B} u = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline 0 & \mathrm{C} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{mat}_\mathscr{B} u^* = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^\top & 0 \\ \hline \mathrm{B}^\top & \mathrm{C}^\top \end{array}\right)$$

L'écriture matricielle de u^* montrer que $\mathrm{F}^\perp$ est stable par u^*. Puis, comme u est un endomorphisme normal, on a

$$\mathrm{M}^\top \mathrm{M} = \mathrm{M}\mathrm{M}^\top \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A}\mathrm{A}^\top + \mathrm{B}\mathrm{B}^\top = \mathrm{A}^\top \mathrm{A}$$

Passant à la trace, en utilisant la propriété fondamentale de la trace, il vient

$$\|\mathrm{A}\|^2 + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}^\top \mathrm{B}) = \|\mathrm{A}\|^2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}^\top \mathrm{B}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{B} = 0$$

En effet, la quantité $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}^\top \mathrm{B})$ est une somme de carrés de réels (que B soit une matrice carrée ou pas). Ceci prouve que $\mathrm{F}^\perp$ est stable par u et F stable par u^*. Enfin, dans le calcul par bloc précédent, on a $\mathrm{A}\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}^\top \mathrm{A}$ et on conclut

$$\boxed{\text{On a F stable par } u^*,\ \mathrm{F}^\perp \text{ stable par } u \text{ et } u^* \text{ et } u_\mathrm{F} \text{ est normal.}}$$

2. Soit $\mathscr{B}$ base orthonormée de E. On a $\mathrm{M} = \mathrm{mat}_\mathscr{B} u = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Il vient

$$\mathrm{M}\mathrm{M}^\top = \mathrm{M}^\top \mathrm{M} \iff \begin{cases} a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \\ ab + cd = ac + bd \\ b^2 + d^2 = c^2 + d^2 \end{cases} \iff b = c \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c = -b \\ b(a-d) = 0 \end{cases}$$

Si $b = c$, on a $\chi_\mathrm{M} = \mathrm{X}^2 - (a+d)\mathrm{X} + ad - b^2$ de discriminant $\Delta = (a-d)^2 + 4b^2$ qui admet un racine réelle, ce qui est exclu. Ainsi, on a $c = -b$. Si $b = 0$, la matrice serait diagonale ce qui est exclu d'où $b \neq 0$ et $a = d$. On conclut

$$\boxed{\text{Dans } \mathscr{B} \text{ base orthonormée de E, on a } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*}$$

3. On procède par récurrence sur $n = \dim \mathrm{E}$. Si $n = 1$, le résultat est immédiat. On suppose le résultat vrai jusqu'au rang $n - 1 \geqslant 1$.

• Si u admet une valeur propre réelle λ, on a E_λ stable par u d'où $\mathrm{E}_\lambda^\perp$ stable par u et $u_{\mathrm{E}_\lambda^\perp}$ normal. Par hypothèse de récurrence, comme $\dim \mathrm{E}_\lambda^\perp < n$, il existe une base orthonormée de $\mathrm{E}_\lambda^\perp$ qui donne la forme souhaitée pour la matrice de $u_{\mathrm{E}_\lambda^\perp}$ dans cette base et on la concatène avec une base orthonormée de E_λ.

• Si u n'admet pas de valeur propre réelle, le polynôme caractéristique se décompose en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré 2. Il existe donc un facteur P de cette décomposition tel que $\mathrm{P}(u) \notin \mathrm{GL}(\mathrm{E})$, sinon on aurait $\chi_u(u) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ alors que $\chi_u(u) = 0$. Ainsi, il existe $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}$ et a, b réels tels que $(u^2 + au + b\,\mathrm{id}\,)(x) = 0 \iff u^2(x) = -bx - au(x)$. Par conséquent, l'espace $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(x, u(x))$ est stable par u. C'est un plan vectoriel car sinon, on aurait $(x, u(x))$ liée d'où $u(x) = \lambda x$ avec λ un réel ce qui est exclu. On a u_F qui est normal et d'après le résultat de la question précédente, dans une base orthonormée de F, la matrice de u_F est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Puis, comme $\mathrm{F}^\perp$ est stable par u et $u_{\mathrm{F}^\perp}$ normal, on applique l'hypothèse de récurrence à $u_{\mathrm{F}^\perp}$ et on concatène les bases obtenues.

On a donc établi

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Pour } u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \text{ normal, il existe une base orthonormée } \mathscr{B} \text{ de E telle que} \\ \text{la matrice } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u \text{ est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux du type} \\ (\lambda) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (a_i, b_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \end{array}}$$

Commentaire : Si u est auto-adjoint, il est un cas particulier d'endomorphisme normal. Il existe donc une base orthonormée dans laquelle la matrice est de la forme souhaitée. Comme u est auto-adjoint, cette matrice est aussi symétrique ce qui interdit la présence de blocs 2×2 et on en déduit le théorème spectral classique.

Si u est une isométrie, alors son adjoint est son inverse et c'est encore un cas particulier d'endomorphisme normal. Il existe donc une base orthonormée dans laquelle la matrice A est de la forme souhaitée. L'égalité $\mathrm{A}^\top \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$ garantit que les termes diagonaux sont ± 1 et que les blocs 2×2 vérifient $a_i^2 + b_i^2 = 1$ et sont donc des blocs de rotation.

Si u est antisymétrique, *i.e.* vérifie $\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$ pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, c'est encore un cas particulier d'endomorphisme normal. Il existe donc une base orthonormée dans laquelle la matrice A est de la forme souhaitée. Comme u est antisymétrique, cette matrice est aussi antisymétrique et on en déduit que $a_i = 0$ dans les blocs 2×2.

Exercice 2 (****)

Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul.

1. Montrer $\quad \mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \det \big(m_{i,j}\big)_{(i,j)\in[\![1\,;\,k]\!]^2} > 0$

2. Application : Montrer que $\big(t^{|i-j|}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ avec $t \in \,]-1\,;1[$ puis montrer $\left(\dfrac{1}{1+|i-j|}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Corrigé : 1. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $\mathrm{P} \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^\top$. Supposons $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \smallsetminus \{0\}$. Ainsi, les valeurs propres propres λ_i sont strictement positives. Posant $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^\top\mathrm{X}$, il vient

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{MX} = \mathrm{X}^\top\mathrm{PDP}^\top\mathrm{X} = \mathrm{Y}^\top\mathrm{DY} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

Comme $\mathrm{P}^\top$ inversible, on a $\mathrm{Y} \neq 0$ pour $\mathrm{X} \neq 0$ et par suite $\mathrm{X}^\top\mathrm{MX} > 0$. Réciproquement, Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \smallsetminus \{0\}$ et λ réel tels que $\mathrm{MX} = \lambda\mathrm{X}$. On a

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{MX} = \langle \mathrm{X}, \mathrm{MX} \rangle = \lambda \|\mathrm{X}\|^2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda > 0$$

Ainsi $\qquad \boxed{\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \smallsetminus \{0\} \quad \mathrm{X}^\top\mathrm{MX} > 0}$

2. Soit $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. On note $\mathrm{M}_k = \big(m_{i,j}\big)_{(i,j)\in[\![1\,;\,k]\!]^2}$. On suppose $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Pour $\mathrm{X}^\top = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, on trouve $\mathrm{X}^\top\mathrm{MX} = \mathrm{X}_k{}^\top\mathrm{M}_k\mathrm{X}_k > 0$ avec $\mathrm{X}_k = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k \end{pmatrix}$. D'après l'équivalence précédente, on en déduit $\mathrm{M}_k \in \mathscr{S}_k^{++}(\mathbb{R})$ et M_k est donc semblable à une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont strictement positifs d'où $\det \mathrm{M}_k > 0$. Réciproquement, on procède par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est immédiat. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant la condition des mineurs principaux (déterminants extraits) strictement positifs. On a $\mathrm{M}_n \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi, avec le théorème spectral, il existe $\mathrm{P} \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{P}^\top\mathrm{M}_n\mathrm{P} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i > 0$. On pose $\mathrm{Q} = \mathrm{diag}(\mathrm{P}, 1)$. On vérifie sans difficulté que Q est une matrice orthogonale. Avec un produit par bloc, on en déduit qu'il existe $a_1, \ldots, a_{n+1}$ réels tels que

$$\mathrm{Q}^\top\mathrm{MQ} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n & \vdots \\ a_1 & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, on a $\det \mathrm{M} = \det(\mathrm{Q}^\top\mathrm{MQ}) > 0$ et avec l'opération $\mathrm{L}_{n+1} \leftarrow \mathrm{L}_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{\lambda_i}\mathrm{L}_i$, on trouve

$$\det(\mathrm{Q}^\top\mathrm{MQ}) = \lambda_1 \ldots \lambda_n \left(a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{\lambda_i} \right) > 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{\lambda_i} > 0$$

Enfin, posant $\mathrm{Y} = \mathrm{QX}$ avec $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{X}^\top\mathrm{MX} = \mathrm{Y}^\top\mathrm{Q}^\top\mathrm{MQY} &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + a_{n+1} y_{n+1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i y_i y_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(y_i + \frac{a_i}{\lambda_i} y_{n+1} \right)^2 + \left(a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{\lambda_i} \right) y_{n+1}^2 \end{aligned}$$

et comme $\mathrm{Y} = 0$ si et seulement si $\mathrm{X} = 0$ puisque Q est inversible, on en déduit $\mathrm{X}^\top \mathrm{MX} > 0$ pour $\mathrm{X} \neq 0$ ce qui clôt la récurrence. On conclut

$$\boxed{\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \det \left(m_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1\,;\, k]\!]^2} > 0}$$

Remarque : Il s'agit du *critère de Sylvester* sur les mineurs principaux.

Variante : On peut chercher une colonne C telle que $\mathrm{DC} + \mathrm{A} = 0$ avec $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\mathrm{A}^\top = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$. On pose ensuite $\mathrm{R} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & \mathrm{C} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ puis on considère la matrice diagonale $\mathrm{M}' = (\mathrm{QR})^\top \mathrm{MQR}$ et on vérifie que la matrice M est symétrique définie positive si et seulement la matrice M' l'est. On conclut sans difficulté avec $\det(\mathrm{M}')$.

3. Soit $t \in \left]-1\,;1\right[$. Notant $\mathrm{M}_k(t) = \left(t^{|i-j|}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}$, avec la séquence d'opérations $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - t\mathrm{L}_{i-1}$, on obtient

$$\forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \det \mathrm{M}_k(t) = (1-t^2)^{k-1} > 0$$

D'après le critère de Sylvester, on en déduit

$$\boxed{\forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{M}_n(t) = \left(t^{|i-j|}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$

Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \smallsetminus \{0\}$. On a $\mathrm{X}^\top \mathrm{M}_n(t)\mathrm{X} > 0$ pour tout $t \in \left[0\,;1\right[$ et par continuité de $t \mapsto \mathrm{X}^\top \mathrm{M}_n(t)\mathrm{X}$, il vient par séparation de l'intégrale

$$\int_0^1 \mathrm{X}^\top \mathrm{M}_n(t)\mathrm{X}\,\mathrm{d}t > 0$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit

$$\mathrm{X}^\top \int_0^1 \mathrm{M}_n(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{X} > 0$$

et
$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad \int_0^1 t^{|i-j|}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+|i-j|}$$

On conclut
$$\boxed{\left(\frac{1}{1+|i-j|}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$

Exercice 3 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$, $\mathrm{C} > 0$ et F un sev de E tel que

$$\forall f \in \mathrm{F} \qquad \|f\|_\infty \leqslant \mathrm{C}\|f\|_2$$

1. Montrer que $\mathrm{F} \neq \mathrm{E}$.
2. Montrer que F est de dimension finie inférieure ou égale à C^2.

Corrigé : 1. Considérant la suite de fonctions $(f_n)_n$ à valeurs dans E définie par $f_n : t \mapsto t^n$ pour n entier, on trouve

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

L'inégalité $1 \leqslant \dfrac{\mathrm{C}}{\sqrt{2n+1}}$ ne peut avoir lieu pour tout n entier. On en déduit

$$\boxed{\mathrm{E} \neq \mathrm{F}}$$

2. On munit F du produit scalaire $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et on choisit $(f_1,\ldots,f_p)$ une famille orthornomée de F. Pour $(\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, on a

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x)\right)^2 \leqslant \mathrm{C}^2\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^2$$

En particulier, pour $x \in [\,0\,;1\,]$, en choisissant $\lambda_i = f_i(x)$ pour tout $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2\right)^2 \leqslant \mathrm{C}^2\left(\sum_{i=1}^{p} f_i(x)^2\right)$$

d'où
$$\sum_{i=1}^{p} f_i(x)^2 \leqslant \mathrm{C}^2$$

On intègre sur $[\,0\,;1\,]$ et il vient
$$\sum_{i=1}^{p}\|f_i\|^2 = p \leqslant \mathrm{C}^2$$

Le sev F est nécessairement de dimension finie sans quoi on pourrait construire une famille orthonormée de F de cardinal $p > \mathrm{C}^2$ ce qui est exclu. On conclut

$$\boxed{\text{Le sev F est de dimension finie inférieure ou égale à } \mathrm{C}^2.}$$

Exercice 4 (****)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0\,;1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On pose $\mathrm{H} = \left\{ f \in \mathrm{E} \mid \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$. Déterminer $\mathrm{H}^\perp$.

Corrigé : Soit $u \in \mathrm{H}^\perp$. Pour $\varepsilon > 0$, on définit $u_\varepsilon \in \mathrm{E}$ par $u_\varepsilon(t) = 0$ pour $t \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, $u_\varepsilon(t) = u(t)$ pour $t \in \left[\frac{1}{2}+\varepsilon\,;1\right]$ et u_ε affine sur $\left[\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}+\varepsilon\right]$. On a $u_\varepsilon \in \mathrm{H}$ et

$$0 = \langle u, u_\varepsilon\rangle \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} u(t)u_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 u(t)^2\,\mathrm{d}t$$

On a $$\left|\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} u(t)u_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \|u\|_\infty \left|u\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \|u\|_\infty^2$$

La fonction $x \mapsto \int_x^1 u(t)^2\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[0\,;1]$ d'après le théorème fondamental d'analyse et on trouve

$$0 = \langle u, u_\varepsilon\rangle = \int_{\frac{1}{2}}^1 u(t)^2\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}(1)$$

Faisant tendre $\varepsilon \to 0$, il vient $$\int_{\frac{1}{2}}^1 u(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$$

Par séparation, l'intégrande étant continu positif sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, il vient $u(t) = 0$ pour $t \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

Puis, on observe que $u - 2\int_0^{\frac{1}{2}} u(t)\,\mathrm{d}t \in \mathrm{H}$ d'où

$$\left\langle u, u - 2\int_0^{\frac{1}{2}} u(t)\,\mathrm{d}t \right\rangle = 0$$

ce qui équivaut à $$\left(\int_0^{\frac{1}{2}} u(t)\right)^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} u(t)^2\,\mathrm{d}t$$

C'est un cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l'espace $\mathscr{C}^0([0\,;1/2], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire induit par celui sur E. Ceci prouve que la fonction u est constante sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ et par continuité en $\frac{1}{2}$, on en déduit la nullité de u. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{H}^\perp = \{0_\mathrm{E}\}}$$

Exercice 5 (***)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On note S la sphère unité de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qu'on munit du produit scalaire canonique. Soit F un sev non trivial de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose

$$\mathrm{R}_{\mathrm{M}}(\mathrm{F}) = \operatorname*{Max}_{\mathrm{X}\in\mathrm{F}\cap\mathrm{S}} \mathrm{X}^\top\mathrm{MX}$$

1. Montrer que $\mathrm{R}_{\mathrm{M}}(\mathrm{F})$ est bien défini.
2. On considère $(v_1,\ldots,v_n)$ une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1(\mathrm{M}) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\mathrm{M})$). Soit $d \in [\![1\,;n]\!]$. Si $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(v_1,\ldots,v_d)$, montrer
$$\mathrm{R}_{\mathrm{M}}(\mathrm{F}) = \lambda_d(\mathrm{M})$$
3. On considère à présent F un sev de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension d entier et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\,(v_d,\ldots,v_n)$. Montrer que $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}\cap\mathrm{S} \neq \varnothing$. En déduire
$$\mathrm{R}_{\mathrm{M}}(\mathrm{F}) \geqslant \lambda_d(\mathrm{M})$$
4. Soient A, B symétriques réelles. On note $\mathrm{C} = \mathrm{A}+\mathrm{B}$.
   (a) On considère F et G deux sev de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ d'intersection non triviale. Montrer
   $$\mathrm{R}_{\mathrm{C}}(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}) \leqslant \mathrm{R}_{\mathrm{A}}(\mathrm{F}) + \mathrm{R}_{\mathrm{B}}(\mathrm{G})$$
   (b) Soient k, ℓ, m entiers non nuls tels que $\ell + m = k + n$. Montrer
   $$\lambda_k(\mathrm{C}) \leqslant \lambda_\ell(\mathrm{A}) + \lambda_m(\mathrm{B})$$
   (c) Soient k, ℓ, m entiers non nuls tels que $\ell + m = k + 1$. Montrer
   $$\lambda_k(\mathrm{C}) \geqslant \lambda_\ell(\mathrm{A}) + \lambda_m(\mathrm{B})$$
5. Montrer que l'application N qui à $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ associe $\operatorname*{Max}_{\mathrm{X}\in\mathrm{S}} \|\mathrm{MX}\|$ est une norme sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
6. Exprimer $\mathrm{N}(\mathrm{M})$ en fonction des $\lambda_k(\mathrm{M})$.
7. Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$. Montrer que l'application $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \mathrm{M} \mapsto \lambda_k(\mathrm{M})$ est lipschitzienne.

Corrigé : 1. L'application $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^\top\mathrm{MX} = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}x_ix_j$ est polynomiale donc continue sur $\mathrm{F}\cap\mathrm{S}$ fermé borné de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il s'agit donc d'un compact et par conséquent

$$\boxed{\text{La quantité } \mathrm{R}_{\mathrm{M}}(\mathrm{F}) \text{ est bien définie.}}$$

2. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{F}\cap\mathrm{S}$. On note $\mathrm{X} = \sum\limits_{i=1}^{d} x_iv_i$ avec $\sum\limits_{i=1}^{d} x_i^2 = 1$. On a

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{MX} = \langle \mathrm{X}, \mathrm{MX}\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{d} x_iv_i, \sum_{j=1}^{d} \lambda_j(\mathrm{M})x_jv_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{d} \lambda_ix_i^2 \leqslant \lambda_d(\mathrm{M})$$

et pour $\mathrm{X} = v_d$, on a bien $\mathrm{X} \in \mathrm{F}\cap\mathrm{S}$ avec $\mathrm{X}^\top\mathrm{MX} = \lambda_d(\mathrm{M})$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{R}_{\mathrm{M}}(\mathrm{F}) = \lambda_d(\mathrm{M})}$$

3. Supposons $\mathrm{F}\cap\mathrm{G} = \{0\}$. D'après la formule de Grassmann, on aurait alors

$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = \dim\mathrm{F} + \dim\mathrm{G} - \dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}) = d + n - d + 1 = n + 1$$

ce qui est absurde. On en déduit que $F \cap G$ est un sev non trivial et s'il contient un vecteur X non nul, alors il contient $X/\|X\|$ par stabilité par combinaison linéaire. Ainsi

$$\boxed{F \cap G \cap S \neq \varnothing}$$

Soit $X \in F \cap G \cap S$. On note $X = \sum\limits_{i=d}^{n} x_i v_i$ avec $\sum\limits_{i=d}^{n} x_i^2 = 1$. On a

$$X^\top MX = \langle X, MX \rangle = \sum_{i=d}^{n} \lambda_i(M) x_i^2 \geqslant \lambda_d(M) \quad \text{et} \quad \underset{X \in F \cap S}{\mathrm{Max}}\, X^\top MX \geqslant \underset{X \in F \cap G \cap S}{\mathrm{Max}}\, X^\top MX$$

Ainsi

$$\boxed{R_M(F) \geqslant \lambda_d(M)}$$

4.(a) Soit $X \in F \cap G \cap S$. En particulier, on a $X \in F \cap S$ et $X \in G \cap S$ puis

$$X^\top CX = X^\top AX + X^\top BX \leqslant R_A(F) + R_B(G)$$

Passant à la borne supérieure, on obtient

$$\boxed{R_C(F \cap G) \leqslant R_A(F) + R_B(G)}$$

4.(b) Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres ordonnées et de même pour $(v_1, \ldots, v_n)$ avec B. On pose

$$F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_\ell) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_m)$$

D'après le résultat de la question 3, on a

$$R_A(F) = \lambda_\ell(A) \quad \text{et} \quad R_B(G) = \lambda_m(B)$$

Si $\dim F \cap G = 0$, alors $\dim(F+G) = \dim F + \dim G = n + k > n$ ce qui est absurde. Par ailleurs, on a

$$d = \dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim(F+G) \geqslant \ell + m - n \geqslant k$$

D'après le résultat de la question 5, il vient

$$R_C(F \cap G) \geqslant \lambda_d(C) \quad \text{et} \quad \lambda_d(C) \geqslant \lambda_k(C)$$

Ainsi

$$\boxed{\lambda_k(C) \leqslant \lambda_\ell(A) + \lambda_m(B)}$$

4.(c) Pour $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on observe

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \lambda_i(-M) = -\lambda_{n+1-i}(M)$$

On a $n + 1 - \ell + n + 1 - m = n + (n + 1 - k)$ puis, avec le résultat de la question précédente appliquée à $-A$, $-B$ et $-C$, il vient

$$\lambda_{n+1-k}(-C) \leqslant \lambda_{n+1-\ell}(-A) + \lambda_{n+1-m}(-B)$$

Avec la remarque préliminaire, on conclut

$$\boxed{\lambda_\ell(A) + \lambda_m(B) \leqslant \lambda_k(C)}$$

5. Soit $(A, B) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2$. On a

$$\forall X \in S \qquad \|(A+B)X\| \leqslant \|AX\| + \|BX\| \leqslant N(A) + N(B)$$

Passant à la borne supérieure en $X \in S$, on en déduit que N satisfait l'inégalité triangulaire. Supposons $N(M) = 0$ pour $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $X \neq 0$, notant $U = X/\|X\|$, on a $U \in S$ puis

$$0 \leqslant \frac{\|MX\|}{\|X\|} = \|MU\| \leqslant N(M) = 0$$

d'où $\mathrm{MX}=0$ et par suite $\mathrm{M}=0$. Enfin, pour $(\lambda, \mathrm{M}) \in \mathbb{R} \times \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on a pour $\mathrm{X} \in \mathrm{S}$

$$\|\lambda \mathrm{MX}\| = |\lambda|\,\|\mathrm{MX}\| \leqslant |\lambda|\,\mathrm{N}(\mathrm{M})$$

puis
$$\mathrm{N}(\lambda \mathrm{M}) \leqslant |\lambda|\,\mathrm{N}(\mathrm{M})$$

et pour $\lambda \neq 0$, on a

$$\mathrm{N}(\mathrm{M}) = \mathrm{N}\left(\frac{1}{\lambda}\lambda\mathrm{M}\right) \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\mathrm{N}(\lambda\mathrm{M})$$

On conclut
$$\boxed{\text{L'application N est une norme sur } \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).}$$

6. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Avec les notations définies précédemment, pour $\mathrm{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i$ avec $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, on a

$$\|\mathrm{MX}\|^2 = \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathrm{M}) x_i v_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \leqslant \left(\operatorname*{Max}_{i \in [\![1\,;\, n]\!]} |\lambda_i(\mathrm{M})|\right)^2$$

Sans difficulté, on constate que

$$\operatorname*{Max}_{i \in [\![1\,;\, n]\!]} |\lambda_i(\mathrm{M})| = \operatorname{Max}\left(|\lambda_1(\mathrm{M})|\,, |\lambda_n(\mathrm{M})|\right)$$

En choisissant le vecteur X vecteur propre associé à la valeur propre dont la valeur absolue réalise le maximum, on constate que l'inégalité précédente peut être une égalité et on conclut

$$\boxed{\mathrm{N}(\mathrm{M}) = \operatorname{Max}\left(|\lambda_1(\mathrm{M})|\,, |\lambda_n(\mathrm{M})|\right)}$$

7. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2$ et $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. Avec le résultat de la question 4.(c), on obtient

$$\lambda_k(\mathrm{A}) - \lambda_k(\mathrm{B}) = \lambda_k(\mathrm{A}) + \lambda_{n+1-k}(-\mathrm{B}) \leqslant \lambda_n(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}-\mathrm{B})$$

et l'autre inégalité suit par symétrie des rôles. On conclut

$$\boxed{\text{Pour } k \in [\![1\,;\, n]\!], \text{ l'application } \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \mathrm{M} \mapsto \lambda_k(\mathrm{M}) \text{ est 1-lipschitzienne.}}$$

Exercice 6 (***)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul et u_1, …, u_p des endomorphismes auto-adjoints de E vérifiant

$$\sum_{i=1}^{p} \operatorname{rg} u_i = n \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{E} \qquad \sum_{i=1}^{p} \langle u_i(x), x\rangle = \|x\|^2$$

Montrer que $\mathrm{E} = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{i\in[\![1\,;\,p]\!]}} \operatorname{Im} u_i$ et que les u_i sont des projecteurs orthogonaux.

Corrigé : On a $\sum\limits_{i=1}^{p} u_i \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. Supposons qu'il existe $\lambda \in \operatorname{Sp}\left(\sum\limits_{i=1}^{p} u_i\right)$ avec $\lambda \neq 1$. Pour x vecteur propre associé, on aurait

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} u_i(x), x \right\rangle = \lambda \|x\|^2 \neq \|x\|^2$$

ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, l'endomorphisme auto-adjoint $\sum\limits_{i=1}^{p} u_i$ admet 1 pour unique valeur propre et comme il est diagonalisable, il s'ensuit $\sum\limits_{i=1}^{p} u_i = \mathrm{id}$. On remarque l'égalité

$$\mathrm{E} = \operatorname{Im} \sum_{i=1}^{p} u_i \subset \sum_{i=1}^{p} \operatorname{Im} u_i \subset \mathrm{E}$$

et on en déduit
$$\dim \sum_{i=1}^{p} \operatorname{Im} u_i = n = \sum_{i=1}^{p} \dim \operatorname{Im} u_i$$

d'où
$$\mathrm{E} = \bigoplus_{i\in[\![1\,;\,p]\!]} \operatorname{Im} u_i$$

Puis
$$\forall (x,k) \in \mathrm{E} \times [\![1\,;\,p]\!] \qquad u_k(x) = \sum_{i=1}^{p} u_i \circ u_k(x)$$

et par unicité de la décomposition, il s'ensuit pour $k \in [\![1\,;\,p]\!]$ que $u_k = u_k^2$ d'où u_k projecteur et endomorphisme auto-adjoint donc projecteur orthogonal. Il résulte également de l'unicité que pour $(i,k) \in [\![1\,;\,p]\!]^2$ avec $i \neq k$, on a $u_i \circ u_k = 0$ d'où $\operatorname{Im} u_k \subset \operatorname{Ker} u_i = (\operatorname{Im} u_i)^{\perp}$ ce qui prouve l'orthogonalité des $\operatorname{Im} u_k$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{E} = \overset{\perp}{\bigoplus_{i\in[\![1\,;\,p]\!]}} \operatorname{Im} u_i \text{ et les } u_i \text{ sont des projecteurs orthogonaux.}}$$

Remarque : Il s'agit du *théorème de Fischer-Cochran.*