ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°72

Exercice 1 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \cap 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z} = \varnothing$.

1. Montrer que $\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \mathrm{I}_n$ est inversible.
2. Soit $\mathrm{B} : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ continue et 1-périodique. Montrer que l'équation
$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}(t)$$
admet une unique solution 1-périodique.

Corrigé : 1. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on dispose de $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, D diagonale et T triangulaire supérieure stricte avec $\mathrm{DT} = \mathrm{TD}$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{P}(\mathrm{D}+\mathrm{T})\mathrm{P}^{-1}$. On a $\mathrm{e}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}_n + \mathrm{T}'$ avec $\mathrm{T}' = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{T}^k}{k!}$ triangulaire supérieure stricte. D'après la relation fondamentale de l'exponentielle, il vient
$$\mathrm{P}^{-1}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \mathrm{I}_n\right)\mathrm{P} = \mathrm{e}^{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}} - \mathrm{I}_n = \mathrm{e}^{\mathrm{D}+\mathrm{T}} - \mathrm{I}_n = \mathrm{e}^{\mathrm{D}}\mathrm{e}^{\mathrm{T}} - \mathrm{I}_n = \mathrm{e}^{\mathrm{D}} + \mathrm{e}^{\mathrm{D}}\mathrm{T}' - \mathrm{I}_n$$
et on vérifie sans difficulté que $\mathrm{e}^{\mathrm{D}}\mathrm{T}'$ est triangulaire supérieure stricte (produit d'une matrice diagonale par une matrice triangulaire supérieure stricte). On en déduit
$$\mathrm{Sp}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \mathrm{I}_n) = \left\{\mathrm{e}^{\lambda} - 1, \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})\right\}$$
Avec l'hypothèse $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \cap 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z} = \varnothing$, on conclut
$$\boxed{\text{La matrice } \mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \mathrm{I}_n \text{ est inversible.}}$$
2. Notons (L) le système différentiel linéaire avec second membre. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{S}_{\mathrm{L}}$. Posons $\mathrm{Y} : t \mapsto \mathrm{X}(t+1)$. On a clairement $\mathrm{Y} \in \mathrm{S}_{\mathrm{L}}$ d'où $\mathrm{Y}-\mathrm{X}$ solution du système homogène $(\mathrm{Y}-\mathrm{X})' = \mathrm{A}(\mathrm{Y}-\mathrm{X})$ et par conséquent
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad (\mathrm{Y}-\mathrm{X})(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{U}_0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{U}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$
Si $(\mathrm{Y}-\mathrm{X})(0) = 0$, il s'ensuit que $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$. La réciproque étant immédiate, on a établi
$$\mathrm{X} \text{ 1-périodique} \iff \mathrm{X}(1) = \mathrm{X}(0)$$
Par variation de la constante, on a
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\left(\mathrm{X}_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-s\mathrm{A}}\mathrm{B}(s)\,\mathrm{d}s\right)$$
Par suite
$$\begin{aligned} \mathrm{X}(1) = \mathrm{X}(0) &\iff \mathrm{e}^{\mathrm{A}}\int_0^1 \mathrm{e}^{-s\mathrm{A}}\mathrm{B}(s)\,\mathrm{d}s = -\left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \mathrm{I}_n\right)\mathrm{X}_0 \\ &\iff \mathrm{X}_0 = -\left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \mathrm{I}_n\right)^{-1}\int_0^1 \mathrm{e}^{-s\mathrm{A}}\mathrm{B}(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$
Ainsi
$$\boxed{\text{L'équation (L) admet une unique solution 1-périodique.}}$$

Exercice 2 (***)

Soit $A \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$. Pour α réel, on note

$$\mathrm{U}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{P}^\top \mathrm{AP} = \mathrm{U}(\alpha)$ avec α réel.
2. Déterminer la nature des courbes paramétrées solutions de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$.

Corrigé : 1. On a $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}^\top) = \det(-\mathrm{A}) = (-1)^3 \det(\mathrm{A}) = -\det(\mathrm{A})$

d'où $\det(\mathrm{A}) = 0$ et par conséquent 0 est valeur propre de A. On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. L'endomorphisme u est *antisymétrique*, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$$

et l'induit par u sur un sev stable est clairement antisymétrique. Pour F sev stable par u, on a $\mathrm{F}^\perp$ stable par u. En effet, soit $x \in \mathrm{F}^\perp$. On a

$$\forall y \in \mathrm{F} \qquad \langle u(x), y\rangle = -\langle x, \underbrace{u(y)}_{\in \mathrm{F}}\rangle = 0$$

Soit $\varepsilon_1 \in \mathrm{E}_0(u)$ vecteur normée avec $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ canoniquement associé à A. Par conséquent, le plan vectoriel $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1)^\perp$ est stable par u et l'endomorphisme induit u_F est antisymétrique. Prenant $\mathscr{B}_\mathrm{F} = (\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base orthonormée de F, la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{F}} u_\mathrm{F}$ est dans $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ et est donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec α réel. Ainsi, notant $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, la famille $\mathscr{B}$ est par construction une base orthonormée de E. Quitte à échanger ε_1 par $-\varepsilon_1$, on peut la supposer directe et on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \mathrm{U}(\alpha)$. Ainsi, d'après les formules de changement de bases, comme $\mathrm{P}^\top = \mathrm{P}^{-1}$, la matrice P étant orthogonale en tant que matrice de passage entre deux bases orthonormées directes, on conclut

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{P} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) \text{ telle que } \mathrm{P}^\top \mathrm{AP} = \mathrm{U}(\alpha) \text{ avec } \alpha \text{ réel.}}$$

2. Soit X solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$. Si $\alpha = 0$, alors $\mathrm{A} = 0$ d'où X constante. La courbe paramétrée par $t \mapsto \mathrm{X}(t)$ est donc réduite à un point. Supposons $\alpha \neq 0$. On pose $\mathrm{Y}(t) = \mathrm{P}^\top \mathrm{X}(t)$ pour tout t réel. On a

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \iff \mathrm{Y}' = \mathrm{U}(\alpha)\mathrm{Y}$$

Ainsi $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{Y}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{U}(\alpha)t}\mathrm{Y}_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{U}(\alpha t)}\mathrm{Y}_0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{Y}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Un calcul par bloc donne

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{U}(\alpha t)} = \exp\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{U}(\alpha t) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{e}^0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{U}(\alpha t)} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{R}(\alpha t) \end{array}\right)$$

matrice de rotation d'angle α. Ainsi, la courbe paramétrée par $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{U}(\alpha t)}\mathrm{Y}_0$ est l'ensemble des points obtenus par rotation d'angle αt de Y_0 autour de l'axe $\mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1)$. Il s'agit donc d'un cercle dans l'espace E. La transformation $\mathrm{Y} \mapsto \mathrm{PY}$ étant isométrique, on conclut

$$\boxed{\text{Les courbes paramétrées solutions de } \mathrm{X}' = \mathrm{AX} \text{ sont des cercles de l'espace E.}}$$

Remarque : Le cas $\alpha = 0$ donne aussi un cercle mais dégénéré, de rayon nul.

Exercice 3 (****)

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$ le *commutateur* de A et B défini par $[\mathrm{A},\mathrm{B}] = \mathrm{AB}-\mathrm{BA}$. On suppose que le commutateur $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$ commute avec A et B. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}$$

Pour t réel, déterminer une expression de $\varphi(t)$ en fonction de $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$.

Corrigé : On rappelle que pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{t\mathrm{M}}$ est dérivable avec

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{t\mathrm{M}}\right] = \mathrm{M}\mathrm{e}^{t\mathrm{M}} = \mathrm{e}^{t\mathrm{M}}\mathrm{M}$$

La fonction φ est dérivable comme produit de telles fonctions et on trouve

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(t) &= -\mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}(\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{e}^{t\mathrm{B}} + \mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{A}\mathrm{e}^{t\mathrm{B}} + \mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{B}\mathrm{e}^{t\mathrm{B}} \\ &= \mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\left(-\mathrm{B}\mathrm{e}^{t\mathrm{A}} + \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{B}\right)\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}\end{aligned}$$

avec, par convergence absolue

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad -\mathrm{B}\mathrm{e}^{t\mathrm{A}} + \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{B} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\left[\mathrm{A}^k\mathrm{B} - \mathrm{B}\mathrm{A}^k\right]$$

On a $$\mathrm{AB}-\mathrm{BA} = [\mathrm{A},\mathrm{B}]$$

puis $$\mathrm{A}^2\mathrm{B} - \mathrm{B}\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}\left(\mathrm{AB}-\mathrm{BA}\right) + \left(\mathrm{AB}-\mathrm{BA}\right)\mathrm{A} = 2\mathrm{A}\left[\mathrm{A},\mathrm{B}\right]$$

On peut alors conjecturer $\quad \forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}^k\mathrm{B} - \mathrm{B}\mathrm{A}^k = k\mathrm{A}^{k-1}\left[\mathrm{A},\mathrm{B}\right]$

L'initialisation pour $k=1$ est déjà faite. Supposons la propriété vraie au rang k entier non nul. Il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^{k+1}\mathrm{B} - \mathrm{B}\mathrm{A}^{k+1} &= \mathrm{A}\left(\mathrm{A}^k\mathrm{B} - \mathrm{B}\mathrm{A}^k\right) + \left(\mathrm{AB}-\mathrm{BA}\right)\mathrm{A}^k \\ &= k\mathrm{A}^k\left[\mathrm{A},\mathrm{B}\right] + \left[\mathrm{A},\mathrm{B}\right]\mathrm{A}^k = (k+1)\mathrm{A}^k\left[\mathrm{A},\mathrm{B}\right]\end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. Il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(t) = \mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}k\mathrm{A}^{k-1}\left[\mathrm{A},\mathrm{B}\right]\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}$$

Le commutateur $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$ commute avec A et B donc $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ puis avec $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$ et $\mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}$ et on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(t) = \mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}t\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\left[\mathrm{A},\mathrm{B}\right]\mathrm{e}^{t\mathrm{B}} = t\left[\mathrm{A},\mathrm{B}\right]\varphi(t)$$

Par analogie avec le cas dans $\mathbb{C}$, on calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}[\mathrm{A},\mathrm{B}]}\right] = t\left[\mathrm{A},\mathrm{B}\right]\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}[\mathrm{A},\mathrm{B}]}$$

Enfin, les fonctions φ et $t \mapsto \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}[\mathrm{A},\mathrm{B}]}$ sont toutes deux solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases}\mathrm{X}' = t\left[\mathrm{A},\mathrm{B}\right]\mathrm{X} \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{I}_n\end{cases}$$

et d'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, on conclut

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}[\mathrm{A},\mathrm{B}]}}$$

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère les solutions de l'équation

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \tag{H}$$

Pour $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $t \mapsto \Phi(t, \mathrm{X}_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \mathrm{X}' = \mathrm{AX} \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0 \end{cases}$$

Les solutions de (H) sont dites *stables* s'il existe $\mathrm{C} \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \geqslant 0 \quad \forall (\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2 \qquad \|\Phi(t, \mathrm{X}_0) - \Phi(t, \mathrm{X}_1)\| \leqslant \mathrm{C}\|\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_0\|$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que les solutions de (H) soient stables.

Corrigé : Dans tout ce qui suit, la norme considérée est la norme $\|\cdot\|_1$. On a

$$\forall (t, \mathrm{X}_0) \in \mathbb{R} \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \Phi(t, \mathrm{X}_0) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0$$

Ainsi, pour $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_0) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2$, on a

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \Phi(t, \mathrm{X}_0) - \Phi(t, \mathrm{X}_1) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}(\mathrm{X}_0 - \mathrm{X}_1)$$

d'où
$$\forall t \geqslant 0 \qquad \|\Phi(t, \mathrm{X}_0) - \Phi(t, \mathrm{X}_1)\| \leqslant \|\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\|\|\mathrm{X}_0 - \mathrm{X}_1\|$$

Montrons l'équivalence

$$\|\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\| \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{O}(1) \iff \forall \mathrm{Y} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \qquad \|\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{Y}\| \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{O}(1) \tag{$*$}$$

Le sens direct est immédiate puisque pour $\mathrm{Y} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a $\|\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{Y}\| \leqslant \|\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\|\|\mathrm{Y}\|$. Réciproquement, notant $\mathrm{Y} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$ avec $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, il vient par inégalité triangulaire

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \|\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{Y}\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |y_i|\,\|\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}e_i\|$$

On dispose de $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que $\|\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}e_i\| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ et tout $t \geqslant 0$. Il vient

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \|\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{Y}\| \leqslant \mathrm{M}\sum_{i=1}^{n} |y_i| = \mathrm{M}\|\mathrm{Y}\|$$

d'où le sens indirect. On a établi dans l'exercice 9 feuille 71 le résultat suivant :

> Les solutions de (H) sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$, on a $\mathrm{Re}\,(\lambda) < 0$ ou $\mathrm{Re}\,(\lambda) = 0$ et le bloc correspondant diagonalisable.

Avec l'équivalence $(*)$, on conclut

Les solutions de (H) sont stables sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$, on a $\mathrm{Re}\,(\lambda) < 0$ ou $\mathrm{Re}\,(\lambda) = 0$ et le bloc correspondant diagonalisable.

Exercice 5 (****)

Soit $\mathrm{A} : t \mapsto \mathrm{A}(t)$ continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \|\mathrm{A}(t)\|_1 \,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que toute solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}$ admet une limite dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour $t \to +\infty$.

Corrigé : Dans tout ce qui suit, la norme considérée est la norme $\|\cdot\|_1$. Soit X solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}$. On note $\mathrm{X}^\top = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$. On a

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \mathrm{X}(t) = \mathrm{X}(0) + \int_0^t \mathrm{X}'(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{X}(0) + \int_0^t \mathrm{A}(s)\mathrm{X}(s)\,\mathrm{d}s$$

On observe sans difficulté

$$\int_0^{+\infty} \|\mathrm{X}'(s)\|\,\mathrm{d}s \text{ converge} \iff \forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \int_0^{+\infty} x_i'(s)\,\mathrm{d}s \text{ converge absolument}$$

et cette dernière condition implique la converge de $\displaystyle\int_0^t \mathrm{X}'(s)\mathrm{d}s$ pour $t \to +\infty$. La norme $\|\cdot\|_1$ vérifie la propriété $\|\mathrm{A}(s)\mathrm{X}(s)\| \leqslant \|\mathrm{A}(s)\|\|\mathrm{X}(s)\|$ pour tout $s \geqslant 0$ et combinée à l'inégalité triangulaire, il vient

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \|\mathrm{X}(t)\| \leqslant \|\mathrm{X}(0)\| + \int_0^t \|\mathrm{A}(s)\|\|\mathrm{X}(s)\|\,\mathrm{d}s$$

Alors, d'après le lemme de Gronwall, on obtient

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \|\mathrm{X}(t)\| \leqslant \|\mathrm{X}(0)\| \exp\left(\int_0^t \|\mathrm{A}(s)\|\,\mathrm{d}s\right) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$$

d'où $$\forall t \geqslant 0 \qquad \|\mathrm{X}'(t)\| = \|\mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t)\| \leqslant \|\mathrm{A}(t)\|\|\mathrm{X}(t)\| = \mathrm{O}\left(\|\mathrm{A}(t)\|\right)$$

ce qui prouve l'intégrabilité de $t \mapsto \|\mathrm{X}'(t)\|$ par comparaison. Avec l'équivalence préliminaire, on conclut

$$\boxed{\text{Toute solution de } \mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} \text{ admet une limite dans } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ pour } t \to +\infty.}$$

Exercice 6 (****)

1. Montrer que l'exponentielle réalise une bijection entre les matrices nilpotentes et les matrices *unipotentes* (de la forme $\mathrm{I}_n + \mathrm{N}$ avec N nilpotente) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Quelle est l'image de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par l'exponentielle ?

Corrigé : 1. On rappelle que l'indice de nilpotence d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est majoré par n. Notons $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et considérons l'application définie par

$$\forall \mathrm{N} \in \mathscr{N} \qquad \varphi(\mathrm{N}) = \mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n$$

Pour $\mathrm{N} \in \mathscr{N}$, on a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{N}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{N}^k}{k!} = \mathrm{I}_n + \mathrm{N}' \quad \text{avec} \quad \mathrm{N}' = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{N}^k}{k!} = \mathrm{N} \times \mathrm{P}(\mathrm{N}) \quad \text{où} \quad \mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$$

La matrice N′ est donc nilpotente autrement dit l'application φ est définie de $\mathscr{N}$ dans $\mathscr{N}$. Montrons qu'elle est bijective. Si on travaillait sur $\mathbb{R}$, la réciproque de l'application $x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$ serait $x \mapsto \ln(1+x)$ définie de $]-1\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On connaît le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ et on va simplement adapter son usage aux matrices nilpotentes. Posons

$$\forall \mathrm{N} \in \mathscr{N} \qquad \psi(\mathrm{N}) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{\mathrm{N}^k}{k}$$

L'application ψ est à valeurs dans $\mathscr{N}$ puisque pour $\mathrm{N} \in \mathscr{N}$, on a $\psi(\mathrm{N}) = \mathrm{N} \times \mathrm{Q}(\mathrm{N})$ avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Notons

$$\mathrm{A} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{X}^k}{k!} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{\mathrm{X}^k}{k}$$

On a $\qquad \mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{A}(x) + \mathrm{o}(x^{n-1}) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{B}(x) + \mathrm{o}(x^{n-1})$

et $\qquad \forall \mathrm{N} \in \mathcal{N} \qquad \varphi(\mathrm{N}) = \mathrm{A}(\mathrm{N}) \quad \text{et} \quad \psi(\mathrm{N}) = \mathrm{B}(\mathrm{N})$

Notons π_{n-1} le projecteur de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ sur $\mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}^k, k \geqslant n)$. On a

$$\mathrm{e}^{\ln(1+x)} - 1 = x \underset{x\to 0}{=} \pi_{n-1}(\mathrm{A}\circ\mathrm{B})(x) + \mathrm{o}(x^{n-1}) \quad \text{et} \quad \ln(1+\mathrm{e}^x - 1) = x \underset{x\to 0}{=} \pi_{n-1}(\mathrm{B}\circ\mathrm{A})(x) + \mathrm{o}(x^{n-1})$$

Par unicité du développement limité, on en déduit

$$\pi_{n-1}(\mathrm{A}\circ\mathrm{B}) = \mathrm{X} \quad \text{et} \quad \pi_{n-1}(\mathrm{B}\circ\mathrm{A}) = \mathrm{X}$$

Or, pour $\mathrm{N} \in \mathcal{N}$, du fait du caractère nilpotent, on a exactement

$$\varphi\circ\psi(\mathrm{N}) = \pi_{n-1}(\mathrm{A}\circ\mathrm{B})(\mathrm{N}) \quad \text{et} \quad \psi\circ\phi(\mathrm{N}) = \pi_{n-1}(\mathrm{B}\circ\mathrm{A})(\mathrm{N})$$

d'où $\qquad \forall \mathrm{N} \in \mathcal{N} \qquad \varphi\circ\psi(\mathrm{N}) = \psi\circ\varphi(\mathrm{N}) = \mathrm{N}$

On conclut

$$\boxed{\text{L'exponentielle réalise une bijection entre matrices nilpotentes et unipotentes de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).}$$

2. Montrons que $\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit $\mathrm{B} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ avec $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) = \{\lambda\}$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$\chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}) = 0 \iff (\mathrm{B} - \lambda\mathrm{I}_n)^n = 0$$

Par suite, la matrice $\mathrm{N} = \dfrac{1}{\lambda}(\mathrm{B} - \lambda\mathrm{I}_n)$ est nilpotente et on a $\mathrm{B} = \lambda(\mathrm{I}_n + \mathrm{N})$. D'après le résultat de la question 1 et d'après la surjectivité de $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, on dispose de $\mu \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tels que

$$\lambda = \mathrm{e}^{\mu} \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_n + \mathrm{N} = \mathrm{e}^{\mathrm{M}}$$

d'où $\qquad \mathrm{B} = \mathrm{e}^{\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{M}} = \mathrm{e}^{\mu\mathrm{I}_n + \mathrm{M}}$

Généralisons au cas d'une matrice $\mathrm{B} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ quelconque. Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ soit une matrice diagonale par blocs de la forme

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = \mathrm{diag}(\lambda_1\mathrm{I}_{m_1} + \mathrm{N}_1, \ldots, \lambda_r\mathrm{I}_{m_r} + \mathrm{N}_r)$$

avec les $\mathrm{N}_i \in \mathscr{M}_{m_i}(\mathbb{C})$ nilpotentes. D'après le cas préliminaire, on a

$$\forall i \in [\![1\,;\, r]\!] \qquad \exists \mathrm{M}_i \in \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{C}) \quad | \quad \lambda_i\mathrm{I}_{n_i} + \mathrm{N}_i = \mathrm{e}^{\mathrm{M}_i}$$

d'où $\qquad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{M}_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{M}_r}) = \exp[\mathrm{diag}(\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_r)]$

et par suite $\qquad \mathrm{B} = \mathrm{P}\exp[\mathrm{diag}(\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_r)]\,\mathrm{P}^{-1} = \exp[\mathrm{P}\,\mathrm{diag}(\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_r)\mathrm{P}^{-1}]$

On conclut $\qquad \boxed{\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$