ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°70

Exercice 1 (*)

L'application $\exp : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est-elle surjective ? injective ?

Exercice 2 (**)

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1. $\begin{cases} x' = 2x - y + \mathrm{e}^{-t} \\ y' = -x + 2y + 2\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = 2x - y + \mathrm{e}^{t} \\ y' = -x + 2y + \mathrm{e}^{t} \end{cases}$

Exercice 3 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et s une symétrie de E. Expliciter $\exp(s)$ puis calculer $\det(\exp(s))$ et $\mathrm{Tr}\,(\exp(s))$.

Exercice 4 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et p et q deux projecteurs associés. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, calculer $\exp(\alpha p + \beta q)$.

Exercice 5 (**)

Calculer e^{A} dans les cas suivants :

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 6 (**)

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 3

$$x^{(3)} - x'' - x' - 2x = 0 \tag{H}$$

1. Écrire le système différentiel associé à l'équation différentielle (H).
2. Déterminer une expression réelle des solutions de l'équation différentielle (H).
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le triplet $(x(0), x'(0), x''(0))$ pour avoir une solution $t \mapsto x(t)$ bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7 (*)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}\ \mathrm{M} = 1$. Calculer e^{M}.

Exercice 8 (*)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \mathrm{e}^{\mathrm{B}} = \int_0^1 \mathrm{e}^{s\mathrm{A}}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\mathrm{e}^{(1-s)\mathrm{B}}\,\mathrm{d}s$$

Exercice 9 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \geqslant \mathrm{N} \qquad \sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{A}^k}{k!} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

Exercice 10 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer $\qquad \mathrm{e}^{\mathrm{A}} \in \mathbb{K}[\mathrm{A}]$

Exercice 11 (**)

Montrer $\qquad \forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \det(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) = \exp(\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}))$

L'exponentielle est-elle surjective de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 12 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et le système différentiel (H) : $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Montrer que $t \mapsto \|\mathrm{X}(t)\|^2$ croît.

Exercice 13 (**)

Soit $\mathrm{A} : t \mapsto \mathrm{A}(t)$ continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{X} : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}'(t) = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t)$$

1. Montrer $\qquad \mathrm{X}(0) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \implies \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

2. Montrer $\qquad \mathrm{X}(0) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \implies \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$

Exercice 14 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible et X solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$. Montrer que X prend ses valeurs dans un hyperplan affine.

Exercice 15 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$;
2. Toute solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ est de norme $\|\cdot\|$ constante.