ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°71

Exercice 1 (**)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Établir

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BA} \iff \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{t(\mathrm{A}+\mathrm{B})} = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}$$

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ muni d'une norme sous-multiplicative.

1. Montrer $$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E} \qquad \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$$
2. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ et $(\mathrm{A}_n)_n \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{A}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{A}$. Établir $$\left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$$
3. Montrer $$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}/n}\mathrm{e}^{\mathrm{B}/n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$$

Exercice 3 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\deg \pi_{\mathrm{A}} = 2$. Montrer que les solutions de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ sont à valeurs dans un plan vectoriel.

Exercice 4 (***)

Soit n entier non nul et $\mathrm{N} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Comparer $\mathrm{Ker}\, \mathrm{N}$ et $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n)$.

Exercice 5 (***)

Montrer que l'exponentielle est injective sur l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra utiliser le fait que deux matrices diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables.

Exercice 6 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec χ_{A} scindé sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Montrer

$$\mathrm{A} \text{ diagonalisable} \iff \mathrm{e}^{\mathrm{A}} \text{ diagonalisable}$$

L'équivalence a-t-elle lieu sans l'hypothèse χ_{A} scindé ?

Exercice 7 (****)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'équation différentielle

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \tag{H}$$

Montrer que les solutions de (H) sont bornées sur $\mathbb{R}$ si et seulement si A est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Exercice 8 (****)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'équation différentielle

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \tag{H}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour avoir

$$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{S_H} \qquad \mathrm{X}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Exercice 9 (****)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'équation différentielle

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \tag{H}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour avoir

$$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{S_H} \qquad \mathrm{X}(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$$