Feuille d'exercices n°72

Exercice 1 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \cap 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z} = \varnothing$.

1. Montrer que $\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \mathrm{I}_n$ est inversible.
2. Soit $\mathrm{B} : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ continue et 1-périodique. Montrer que l'équation
$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}(t)$$
admet une unique solution 1-périodique.

Indications : 1. Utiliser la décomposition $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D} + \mathrm{T}$ avec D diagonale, T triangulaire supérieure stricte telles que $\mathrm{DT} = \mathrm{TD}$.
2. Pour $\mathrm{X} \in \mathrm{S}_{\mathrm{L}}$, poser l'application $\mathrm{Y} : t \mapsto \mathrm{X}(t+1)$ puis en considérant $\mathrm{Y} - \mathrm{X}$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pourtant sur $\mathrm{X}(0)$ et $\mathrm{X}(1)$ pour que la solution soit X soit 1-périodique. En déduire l'unicité de la solution quand cette condition est vérifiée.

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$. Pour α réel, on note
$$\mathrm{U}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{P}^\top \mathrm{AP} = \mathrm{U}(\alpha)$ avec α réel.
2. Déterminer la nature des courbes paramétrées solutions de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$.

Indications : 1. Montrer que 0 est valeur propre de A. Notant $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A, vérifier que u est antisymétrique, *i.e.* $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$ pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. Puis montrer que si F est un sev stable par u, alors l'orthogonal $\mathrm{F}^\perp$ est aussi stable par u et que $u_{\mathrm{F}^\perp}$ est antisymétrique et préciser la forme de la matrice de $u_{\mathrm{F}^\perp}$ dans une base orthonormée de $\mathrm{F}^\perp$.
2. Calculer $\mathrm{e}^{\mathrm{U}(\alpha)}$ pour α réel et conclure.

Exercice 3 (****)

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ le *commutateur* de A et B défini par $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}$. On suppose que le commutateur $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ commute avec A et B. On pose
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}$$
Pour t réel, déterminer une expression de $\varphi(t)$ en fonction de $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$.

Indications : Justifier que φ est dérivable puis établir
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(t) = \mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\left(-\mathrm{B}\mathrm{e}^{t\mathrm{A}} + \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{B}\right)\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}$$
Conjecturer une formule reliant $\mathrm{A}^k\mathrm{B} - \mathrm{BA}^k$ à $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ tout k entier non nul. En déduire une relation simple entre φ' et φ puis conclure.

Exercice 4 (***)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère les solutions de l'équation

$$X' = AX \tag{H}$$

Pour $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $t \mapsto \Phi(t, X_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Les solutions de (H) sont dites *stables* s'il existe $C \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \geqslant 0 \quad \forall (X_0, X_1) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2 \qquad \|\Phi(t, X_0) - \Phi(t, X_1)\| \leqslant C\|X_1 - X_0\|$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que les solutions de (H) soient stables.

Indications : Établir que $t \mapsto e^{tA}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si toute solution de (H) est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Conclure en utilisant le résultat de l'exercice 9 feuille 71.

Exercice 5 (****)

Soit $A : t \mapsto A(t)$ continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \|A(t)\|_1 \, dt$ converge. Montrer que toute solution de $X' = A(t)X$ admet une limite dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour $t \to +\infty$.

Indications : Observer que la convergence de $X(t)$ pour $t \to +\infty$ équivaut à celle de $\displaystyle\int_0^t X'(s) \, ds$ puis que celle-ci est garantie par l'intégrabilité de $t \mapsto \|X'(t)\|_1$. Utiliser alors une écriture intégrale pour X puis le lemme de Gronwall pour conclure.

Exercice 6 (****)

1. Montrer que l'exponentielle réalise une bijection entre les matrices nilpotentes et les matrices *unipotentes* (de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Quelle est l'image de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par l'exponentielle ?

Indications : 1. L'indice de nilpotence est majoré par n. Établir que pour N nilpotente, $e^N - I_n$ l'est aussi puis, notant $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes, établir que $N \mapsto e^N - I_n$ est un bijection de $\mathscr{N}$ sur $\mathscr{N}$. On pourra considérer les développement limités usuels de $e^x - 1$ et $\ln(1+x)$ à l'ordre $n-1$.
2. Traiter d'abord le cas d'une matrice $B \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Sp}(B) = \{\lambda\}$ en décomposant $B = \lambda(I_n + N)$ avec N nilpotente puis généraliser.