ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 02/02/26

Préparation à l'interrogation n°17

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\cos(x)$;
2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$;
3. Développement asymptotique à 3 termes de $\sqrt{1+n} = \sqrt{n}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = \dots$
4. $\mathrm{ch}\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{t^2}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$

2 Trigonométrie

1. $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
2. $\sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$
3. $\cos(t)^2 = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$
4. $\sin(t)^2 = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$

3 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ avec $\alpha \neq 1$;
2. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$;
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}$ avec $a \neq 0$;

4 Exercice type - Lemme de Riemann-Lebesque

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$. Étudier le comportement asymptotique de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\,int}\,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.

Corrigé : Soit n entier non nul. En intégrant par partie, on a

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\,int}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{f(t)\mathrm{e}^{\,int}}{\mathrm{i}n}\right]_a^b - \frac{1}{\mathrm{i}n}\int_a^b f'(t)\mathrm{e}^{\,int}\,\mathrm{d}t$$

D'où
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\,int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\left[|f(a)|+|f(b)|+\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right]$$

Ainsi
$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\,int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

5 Exercice type

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Si $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{\alpha}$.

Corrigé : Pour $x \geqslant 0$, on a $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\left[1-\mathrm{e}^{-\alpha x}\right]$ et $|\mathrm{e}^{-\alpha x}| = \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\,(\alpha)x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Le résultat suit.

6 Exercice type

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ et N une variable aléatoire indépendante des X_n à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose $$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathrm{S_N}(\omega) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}(\omega)} \mathrm{X}_k(\omega)$$

Montrer que $\mathrm{S_N}$ est une variable aléatoire discrète puis établir l'égalité $\mathrm{G_{S_N}} = \mathrm{G_N} \circ \mathrm{G_{X_1}}$.

Corrigé : Voir cours pour le caractère variable aléatoire. On a clairement $\mathrm{S_N}(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Soit $t \in [0\,;1]$. Par transfert puis probabilités totales avec le système complet $(\{\mathrm{N} = n\})_{n\in\mathbb{N}}$ et indépendances des X_k avec N, il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{G_{S_N}}(t) &= \sum_{j=0}^{+\infty} t^j \mathbb{P}(\mathrm{S_N} = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} t^j \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_k = j, \mathrm{N} = n \right) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^j \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k = j \right) \mathbb{P}(\mathrm{N} = n) \right) \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini pour des familles à termes positifs et indépendance des X_k, on obtient

$$\mathrm{G_{S_N}}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} t^j \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = j) \right) \mathbb{P}(\mathrm{N} = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) \mathbb{P}(\mathrm{N} = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{G_{X_1}}(t)^n \mathbb{P}(\mathrm{N} = n)$$

D'où $$\boxed{\mathrm{G_{S_N}} = \mathrm{G_N} \circ \mathrm{G_{X_1}}}$$

7 Exercice type

Soit $\lambda > 0$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que les solutions de $z'' + \lambda z = 0$ soient 2π-périodiques.

Corrigé Les solutions sont de la forme $t \mapsto a\cos(\sqrt{\lambda}t) + b\sin(\sqrt{\lambda}t)$ avec a, b réels, solutions qu'on peut aussi présenter sous la forme $t \mapsto \mathrm{A}\cos(\sqrt{\lambda}t - \theta)$ avec $\mathrm{A} = \sqrt{a^2 + b^2}$ et θ réel tel que $a + \mathrm{i}b = \mathrm{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Si λ est le carré d'un entier, alors les solutions sont 2π-périodiques. Supposons $f : t \mapsto \mathrm{A}\cos(\sqrt{\lambda}t - \theta)$ avec $\mathrm{A} \neq 0$ (cas trivial sinon) 2π-périodique. Alors, on a

$$f\left(\frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}\right) = f\left(\frac{\theta}{\sqrt{\lambda}} + 2\pi\right) \iff 1 = \cos(2\pi\sqrt{\lambda}) \iff 2\pi\sqrt{\lambda} \in 2\pi\mathbb{N} \iff \sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}$$

Ainsi $\boxed{\text{On a la } 2\pi\text{-périodicité des solutions si et seulement si } \lambda \text{ est le carré d'un entier.}}$

8 Questions de cours

Équations différentielles, développements en série entière usuels, graphes usuels.