ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°61

Exercice 1 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et X variable aléatoire réelle discrète telle que $X^4 \in L^1$ et vérifiant $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X^4) = 1$.

1. Montrer $$|\mathbb{E}(X)| \leqslant 1$$
2. Déterminer la loi de X.

Corrigé : 1. On a $$\mathbb{V}(X) \geqslant 0 \iff \mathbb{E}(X)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2) = 1$$

D'où $$\boxed{|\mathbb{E}(X)| \leqslant 1}$$

Remarque : La variable X admet un moment d'ordre 2 comme le sous-entend l'énoncé puisqu'on a $X^2 \in L^2 \subset L^1$.

2. On remarque $$\mathbb{V}(X^2) = 0$$
On en déduit (à redémontrer éventuellement)
$$X^2 = C^{te} \quad \text{p.s.}$$
Avec $\mathbb{E}(X^2) = 1$, on obtient $X^2 = 1$ presque sûrement d'où $X \in \{-1, 1\}$ presque sûrement. La réciproque est immédiate. On conclut
$$\boxed{\mathbb{P}(X = 1) = p \in [\,0\,;1\,] \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = -1) = 1 - p}$$

Exercice 2 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) \subset [\,a\,;b\,]$.

1. Établir $$\mathbb{V}(X) \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$
2. Cette inégalité est-elle optimale ?

Corrigé : 1. La variable X est bornée et par conséquent X^2 également ce qui assure que celle-ci est d'espérance finie. Puis, il vient
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}\left(X - \frac{a+b}{2}\right) \leqslant \mathbb{E}\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

Ainsi $$\boxed{\mathbb{V}(X) \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}$$

Il s'agit de l'inégalité de *Popovicius*.

2. Avec $X \sim \mathscr{U}_{\{a,b\}}$, on a $$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \mathbb{E}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

Ainsi $$\boxed{\text{L'inégalité obtenue est optimale puisqu'on a } \mathbb{V}(X) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.}$$

Remarque : L'inégalité de *Bathia-Davis* améliore l'inégalité de Popovicius mais le majorant fait intervenir $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 3 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y des variables aléatoires réelles discrètes finies vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{E}(\mathrm{X}^k) = \mathbb{E}(\mathrm{Y}^k)$$

Montrer que X et Y ont même loi.

Corrigé : Par linéarité de l'espérance, on trouve

$$\forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \qquad \mathbb{E}(\mathrm{Q}(\mathrm{X})) = \mathbb{E}(\mathrm{Q}(\mathrm{Y}))$$

Notons $\mathrm{A} = \mathrm{X}(\Omega) \cup \mathrm{Y}(\Omega) = \{a_i, i \in [\![1\,;\,n]\!]\}$. Par transfert, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Q}(a_i)\mathbb{P}(\mathrm{X} = a_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Q}(a_i)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = a_i)$$

En considérant la famille des polynômes de Lagrange $(\mathrm{L}_j)_j$ associés à A, on obtient par linéarité de l'espérance

$$\forall j \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} = a_j) = \mathbb{E}(\mathrm{L}_j(\mathrm{X})) = \mathbb{E}(\mathrm{L}_j(\mathrm{Y})) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} = a_j)$$

On conclut $\boxed{\text{Les variables aléatoires X et Y ont même loi.}}$

Exercice 4 (**)

Soit E un ensemble de cardinal n entier non nul. On tire au hasard et avec remise A, B des parties de E. Déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{Card}\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 1)$.

Corrigé : On choisit $\Omega = \mathcal{P}(\mathrm{E})^2$ muni de la tribu discrète et de la probabilité uniforme. On choisit l'élément de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ puis ceux de $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ puis ceux de $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}$. On obtient

$$\mathbb{P}(\mathrm{Card}\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 1) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1-k} n \binom{n-1}{k} \binom{n-1-k}{\ell} = \frac{n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^{n-1-k} = \frac{n}{2^{2n}} (1+2)^{n-1}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{Card}\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 1) = \dfrac{n3^{n-1}}{2^{2n}}}$

Remarque : On peut aussi choisir une partie A non vide, choisir un élément de A puis choisir $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}$ ce qui donne

$$\mathbb{P}(\mathrm{Card}\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 1) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} 2^{n-k} = \frac{n3^{n-1}}{2^{2n}}$$

Exercice 5 (**)

Soit E préhilbertien réel et $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n$. On suppose qu'il existe $\mathrm{C} \geqslant 0$ tel que

$$\forall (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \qquad \Big\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k\Big\| \leqslant \mathrm{C}$$

Montrer

$$\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2 \leqslant \mathrm{C}^2$$

Corrigé : Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables indépendantes de loi de Rademacher donc en particulier finies. On a

$$\mathbb{E}(\|\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k u_k\|^2) \leqslant \mathrm{C}^2$$

et par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(\|\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k u_k\|^2) = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \langle u_i, u_j\rangle \,\mathbb{E}(\mathrm{X}_i \mathrm{X}_j) = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$$

Ainsi $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2 \leqslant \mathrm{C}^2}$

Remarque : On peut faire sans probabilités, par récurrence, mais c'est beaucoup moins joli.

Exercice 6 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\sigma \sim \mathscr{U}_{\mathrm{S}_n}$ et X_σ le nombre de points fixes de σ. Justifier que X_σ est une variable aléatoire puis déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{X}_\sigma)$.

Corrigé : On a $\mathrm{X}_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\sigma(i)=i}$ fonction de σ puis par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}_\sigma) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\sigma(i)=i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\sigma(i) = i)$$

On conclut $\boxed{\text{L'application } \mathrm{X}_\sigma \text{ est une variable aléatoire avec } \mathbb{E}(\mathrm{X}_\sigma) = 1}$

Exercice 7 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = \pm 1) = 1/2$. On note $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier et $\mathrm{L}_n(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}}\right)$ pour t réel. Montrer que pour tout t réel, la suite $(\mathrm{L}_n(t))_n$ converge.

Corrigé : Les variables aléatoires sont finies. Soit t réel. Par indépendance des X_i et égalité en loi, on trouve

$$\mathrm{L}_n(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t\frac{\mathrm{X}_i}{n}}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\frac{\mathrm{X}_i}{\sqrt{n}}}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\frac{\mathrm{X}_1}{\sqrt{n}}}\right)^n$$

et par transfert $$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\frac{\mathrm{X}_1}{\sqrt{n}}}\right) = \mathrm{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

d'où $$\mathrm{L}_n(t) = \mathrm{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\mathrm{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\left(\frac{t}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

Ainsi $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{L}_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}}$

Exercice 8 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(1/2)$. On note $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier non nul. Montrer

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{2n}{3}\right) \leqslant r^n \quad \text{avec} \quad r = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Corrigé : Par croissance stricte de l'exponentielle, on a

$$\left\{\mathrm{S}_n \geqslant \frac{2n}{3}\right\} = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{S}_n} \geqslant \mathrm{e}^{\frac{2n}{3}}\right\}$$

Puis d'après l'inégalité de Markov avec la variable aléatoire finie $\mathrm{e}^{\mathrm{S}_n}$ positive, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{2n}{3}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{2n}{3}} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{S}_n}\right)$$

Par indépendance des X_i et égalité en loi, il vient

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{S}_n}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{X}_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{X}_i}) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{X}_1})^n$$

et par transfert $\qquad \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{X}_1}) = \dfrac{\mathrm{e}^1 + 1}{2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{2n}{3}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{n}{6}} \operatorname{ch}^n\left(\frac{1}{2}\right)}$

Exercice 9 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(x)$ avec $x \in [0\,;1]$. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier non nul. On considère $f : [0\,;1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto |t - 1/2|$ et on pose

$$\forall x \in [0\,;1] \qquad \mathrm{B}_n(f)(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right] \quad \text{et} \quad \Delta_n(f) = \|\mathrm{B}_n(f) - f\|_\infty$$

1. Pour $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^2$, comparer $\mathbb{E}(\mathrm{X})^2$ et $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)$.
2. Vérifier que f est lipschitzienne.
3. Montrer $\qquad \Delta_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Corrigé : 1.D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux variables aléatoires X et 1 (constante), il vient

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{X})^2 = \mathbb{E}(\mathrm{X} \times 1)^2 \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) \times \mathbb{E}(1^2) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2)}$$

Remarque : On peut aussi invoquer la relation de König-Huygens et la positivité de $\mathbb{V}(\mathrm{X})$:

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) - \mathbb{E}(\mathrm{X})^2 \geqslant 0$$

2. Par inégalité triangulaire inverse, on a

$$\boxed{\forall (u, v) \in [0\,;1]^2 \qquad |f(u) - f(v)| = ||u - 1/2| - |v - 1/2|| \leqslant |u - v|}$$

3. La variable aléatoire S_n est finie. Soit $x \in [0\,;1]$. Par inégalité triangulaire, il vient

$$|\mathrm{B}_n(f)(x) - f(x)| = \left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right]\right| \leqslant \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right|\right)$$

Puis

$$|\mathrm{B}_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \mathbb{E}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - x\right|\right) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n} - x\right)^2\right]} = \sqrt{\mathbb{V}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)} = \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$$

On a la majoration $\qquad \forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$

Par conséquent $\qquad \boxed{\Delta_n(f) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

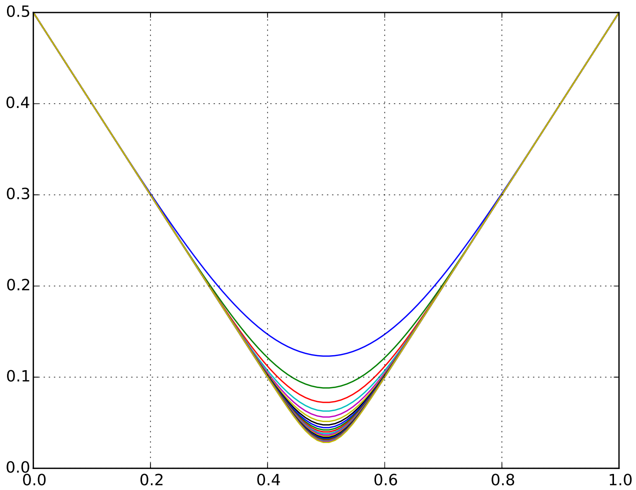

FIGURE 1 – Tracé des graphes de $x \mapsto \mathrm{B}_n(f)(x)$ pour $n \geqslant 1$

Exercice 10 (**)

Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$ et N une variable aléatoire indépendante des X_i avec $\mathrm{N} \sim \mathscr{B}(n,p)$ où n est un entier non nul et $p \in \,]\,0\,;1\,[$. On note $\mathrm{Y} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_i$.

1. Justifier que Y est une variable aléatoire réelle discrète.
2. Déterminer la loi de Y à l'aide de fonctions génératrices mais sans recours aux familles sommables. On pourra utiliser la variable aléatoire $\sum_{j=0}^{n} \mathbb{1}_{\{\mathrm{N}=j\}}$.
3. Retrouver le résultat précédent sans utiliser les fonctions génératrices.

Corrigé : 1. On a

$$\mathrm{Y} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_i = f(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{N}) \quad \text{avec} \quad f(x_1, \ldots, x_n, m) = \sum_{i=1}^{m} x_i$$

Ainsi, on a Y fonction de variables aléatoires discrètes et par conséquent

$$\boxed{\text{L'application Y est une variable aléatoire réelle discrète.}}$$

2. Soit $t \in [\,0\,;1\,]$. On a

$$\mathrm{G}_{\mathrm{N}}(t) = \mathbb{E}(t^{\mathrm{N}}) = \sum_{k=0}^{n} t^k \mathbb{P}(\mathrm{N}=k) = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (tp)^k (1-p)^{n-k}$$

D'où $$\boxed{\mathrm{G_N}(t) = (tp+1-p)^n}$$

Avec le système complet $(\{\mathrm{N}=j\})_{j\in[\![0\,;n]\!]}$, on trouve

$$\mathrm{G_Y}(t) = \mathbb{E}(t^{\mathrm{Y}}) = \mathbb{E}\left[\left(\prod_{i=1}^{\mathrm{N}} t^{\mathrm{X}_i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{1}_{\{\mathrm{N}=j\}}\right)\right] = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}\left[\left(\prod_{i=1}^{j} t^{\mathrm{X}_i}\right)\mathbb{1}_{\{\mathrm{N}=j\}}\right]$$

Par indépendance des X_i avec N puis indépendance des X_i entre elles, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{G_Y}(t) &= \sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{j} \mathrm{X}_i\right)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathrm{N}=j\}})\\ &= \sum_{j=0}^{n}\left(\prod_{i=1}^{j}\mathbb{E}(t^{\mathrm{X}_i})\right)\mathbb{P}(\mathrm{N}=j) = \sum_{j=0}^{n}\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}^{j}(t)\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)\end{aligned}$$

D'où $$\boxed{\mathrm{G_Y} = \mathrm{G_N}\circ \mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}}$$

Remarque : La preuve utilise un argument assez fin. Une variante plus naïve serait :
Par transfert, on a pour t réel

$$\mathrm{G_Y}(t) = \mathbb{E}(t^{\mathrm{Y}}) = \sum_{k=0}^{n} t^t\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k)$$

En considérant le système complet $(\{\mathrm{N}=j\})_{j\in[\![0\,;n]\!]}$, il vient d'après la formule des probabilités totales pour $k\in[\![0\,;n]\!]$

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = \sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{X}_i = k, \mathrm{N}=j\right) = \sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i = k, \mathrm{N}=j\right)$$

et par indépendance des X_i avec N

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = \sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i = k\right)\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)$$

On remarque que $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i = k) = 0$ pour $j<k$ d'où

$$\mathrm{G_Y}(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k\left(\sum_{j=k}^{n}\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i = k)\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)\right) = \sum_{0\leqslant k\leqslant j\leqslant n}\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i = k)t^k$$

En changeant l'ordre de sommation, notant $\mathrm{Z}_j = \sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i$, on obtient

$$\mathrm{G_Y}(t) = \sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)\left(\sum_{k=0}^{j}t^k\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i=k)\right) = \sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)\mathrm{G}_{\mathrm{Z}_j}(t) = \sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}(t)^j$$

D'où $$\boxed{\mathrm{G_Y} = \mathrm{G_N}\circ \mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}}$$

Pour $t\in[\,0\,;1\,]$, il vient

$$\mathrm{G_Y}(t) = \mathrm{G_N}(tx+1-x) = [(tp+1-p)p+1-p]^n = (tp^2+1-p^2)^n$$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on conclut

$$\boxed{\text{La variable aléatoire Y suit la loi binomiale } \mathscr{B}(n,p^2).}$$

3. Soit $k\in \mathrm{Y}(\Omega)\subset[\![0\,;n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales sur le système complet $(\{\mathrm{N}=j\})_{j\in[\![0\,;n]\!]}$ puis indépendance des X_i avec N, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) &= \sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{X}_i = k, \mathrm{N}=j\right)\\ &= \sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i = k, \mathrm{N}=j\right) = \sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i = k\right)\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)\end{aligned}$$

On sait que $\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i \sim \mathscr{B}(j,p)$ d'où $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i = k\right) = 0$ si $j<k$. Par suite, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) &= \sum_{j=k}^{n}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i = k\right)\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)\\ &= \sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}p^k(1-p)^{j-k}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j} = p^k(1-p)^{n-k}\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}\binom{n}{j}p^j\end{aligned}$$

Avec le changement d'indice $\ell = j-k$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) &= p^k(1-p)^{n-k}\sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{j+k}{k}\binom{n}{j+k}p^{\ell+k}\\ &= p^{2k}(1-p)^{n-k}\sum_{\ell=0}^{n-k}\frac{n!}{k!j!(n-k-j)!}p^j = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^{2k}(1-p)^{n-k}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}p^\ell\end{aligned}$$

On identifie alors un binôme et il vient

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = \binom{n}{k}p^{2k}(1-p)^{n-k}(1+p)^{n-k} = \binom{n}{k}p^{2k}\left[(1-p)(1+p)\right]^{n-k}$$

On conclut $\boxed{\text{Y suit la loi binomiale } \mathscr{B}(n,p^2).}$

Exercice 11 (**)

Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle positive finie. Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1([\,0\,;+\infty\,[\,,[\,0\,;+\infty\,[)$ strictement croissante telle que $\varphi(0)=0$. Montrer

$$\mathbb{E}(\varphi(\mathrm{X})) = \int_0^{+\infty}\varphi'(t)\mathbb{P}(\mathrm{X}\geqslant t)\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : On note $\varphi(\mathrm{X})(\Omega) = \{y_1,\ldots,y_n\}$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(\mathrm{X})) &= \sum_{k=1}^{n}y_k\mathbb{P}(\varphi(\mathrm{X})=y_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\varphi^{-1}(y_k)}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\mathbb{P}(\varphi(\mathrm{X})=y_k) = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty}\varphi'(t)\mathbb{1}_{[\,0\,;\varphi^{-1}(y_k)\,]}(t)\mathbb{P}(\varphi(\mathrm{X})=y_k)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Par linéarité car convergence des intégrales concernées, il vient

$$\mathbb{E}(\varphi(\mathrm{X})) = \int_0^{+\infty}\varphi'(t)\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{[\,\varphi(t)\,;+\infty\,[}(y_k)\mathbb{P}(\varphi(\mathrm{X})=y_k)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\varphi'(t)\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\varphi(\mathrm{X})\geqslant\varphi(t)\}}\right)\,\mathrm{d}t$$

Par stricte croissance de φ, on a $\{\varphi(\mathrm{X})\geqslant\varphi(t)\} = \{\mathrm{X}\geqslant t\}$ et on conclut

$$\boxed{\mathbb{E}(\varphi(\mathrm{X})) = \int_0^{+\infty}\varphi'(t)\mathbb{P}(\mathrm{X}\geqslant t)\,\mathrm{d}t}$$