ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°62

Exercice 1 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes d'espérance finie égale à μ. On pose

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathrm{M}(\omega) = \big(\mathrm{X}_{i,j}(\omega)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

Soit λ réel. Justifier que $\chi_{\mathrm{M}}(\lambda)$ est une variable aléatoire réelle discrète d'espérance finie puis calculer $\mathbb{E}(\chi_{\mathrm{M}}(\lambda))$.

Corrigé : Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que $\det \mathrm{A} = \sum\limits_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$. Soit λ réel. On a

$$\chi_{\mathrm{M}}(\lambda) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{M}) = \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda\delta_{i,\sigma(i)} - \mathrm{X}_{i,\sigma(i)}\right)$$

On en en déduit que $\chi_{\mathrm{M}}(\lambda)$ est bien une variable aléatoire réelle discrète en tant que fonction de variables aléatoires réelles discrètes. Comme les $\mathrm{X}_{i,j}$ sont indépendantes et d'espérance finie, il s'ensuit que les variables aléatoires $\prod\limits_{i=1}^{n} \left(\lambda\delta_{i,\sigma(i)} - \mathrm{X}_{i,\sigma(i)}\right)$ sont d'espérance finie et par combinaison linéaire, on obtient que $\chi_{\mathrm{M}}(\lambda)$ également. Par linéarité de l'espérance puis indépendance des $\lambda\delta_{i,\sigma(i)} - \mathrm{X}_{i,\sigma(i)}$, il vient

$$\mathbb{E}(\chi_{\mathrm{M}}(\lambda)) = \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma)\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \left(\lambda\delta_{i,\sigma(i)} - \mathrm{X}_{i,\sigma(i)}\right)\right] = \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\lambda\delta_{i,\sigma(i)} - \mathrm{X}_{i,\sigma(i)}\right)$$

d'où, par linéarité $\qquad \mathbb{E}(\chi_{\mathrm{M}}(\lambda)) = \sum\limits_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} \left(\lambda\delta_{i,\sigma(i)} - \mu\right) = \chi_{\mu\mathrm{J}}(\lambda)$

avec $\mathrm{J} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice constituée de 1. Notant U la matrice colonne formée de 1, on a $\mathrm{JU} = n\mathrm{J}$ et $\mathrm{rg}\ \mathrm{J} = 1$ d'où $\dim \mathrm{E}_0(\mathrm{J}) = n-1$ et $n \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{J})$. Par conséquent, la matrice J est diagonalisable avec J semblable à $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0)$. On conclut

$$\boxed{\mathbb{E}(\chi_{\mathrm{M}}(\lambda)) = \chi_{\mu\mathrm{J}}(\mathrm{M}) = \chi_{\mu\mathrm{D}}(\lambda) = (\lambda - n\mu)\lambda^{n-1}}$$

Exercice 2 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{A}_n)_n$ une suite d'événements. On note

$$\mathrm{A} = \text{« une infinité d'événements } \mathrm{A}_n \text{ est réalisée »}$$

1. Montrer que A est un événement.
2. Si la série $\sum \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)$ converge, montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 0$.

   On suppose désormais les événements $(\mathrm{A}_n)_n$ indépendants.

3. Montrer $\qquad \forall (n, \mathrm{N}) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\mathrm{N}} \overline{\mathrm{A}_k}\right) \leqslant \exp\left(-\sum\limits_{k=n}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)\right)$
4. On suppose que $\sum \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ diverge. Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1$.

Corrigé : 1. On a $\qquad \mathrm{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à une infinité de } \mathrm{A}_n\}$

Ainsi, l'ensemble A s'écrit $\qquad \mathrm{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geqslant n} \mathrm{A}_k$

Par stabilité par intersection et union dénombrables, il s'ensuit

$$\boxed{\text{L'ensemble A est un événement.}}$$

2. Par continuité décroissante, on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant \mathrm{N}} \mathrm{A}_n\right)$$

et d'après l'inégalité de Boole $\qquad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant \mathrm{N}} \mathrm{A}_n\right) \leqslant \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$

le majorant étant le reste d'une série convergente donc de limite nulle. Par comparaison, il vient

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 0}$$

3. Soit $(n,\mathrm{N}) \in \mathbb{N}^2$. On a par indépendance

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\mathrm{N}} \overline{\mathrm{A}_k}\right) = \prod_{k=n}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{A}_k}\right) = \prod_{k=n}^{\mathrm{N}} (1 - \mathbb{P}(\mathrm{A}_k))$$

Avec l'inégalité de convexité $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$ pour tout x réel, on obtient

$$\boxed{\forall (n,\mathrm{N}) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\mathrm{N}} \overline{\mathrm{A}_k}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)\right)}$$

4. Par continuité décroissante, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\mathrm{N}} \bar{\mathrm{A}}_k\right) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{\mathrm{A}_k}\right)$$

et $$\exp\left(-\sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)\right) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$$

puisque $\sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} +\infty$ (série divergente à termes positifs). Par comparaison, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{\mathrm{A}_k}\right) = 0$$

Une union dénombrable d'événements négligeables étant négligeable, il s'ensuit par continuité croissante

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{\mathrm{A}_k}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{\mathrm{A}_k}\right) = 0$$

Par complémentation, on conclut

$$\boxed{\text{Si la série } \sum \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \text{ diverge, alors on a } \mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1.}$$

Remarque : Ces résultats sont connus sous le nom de *lemmes de Borel-Cantelli.*

Exercice 3 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{A}^2 \qquad |\mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})| \leqslant \frac{1}{4}$$

puis préciser le cas d'égalité.

Corrigé : Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{A}^2$. Avec le système complet $\{\mathrm{B}, \bar{\mathrm{B}}\}$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) &= \left[\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}})\right] \mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \\ &= \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \left[\mathbb{P}(\mathrm{B}) - 1\right] + \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}})\mathbb{P}(\mathrm{B}) \\ \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) &= \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}})\mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\bar{\mathrm{B}})\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})\end{aligned}$$

D'où $\qquad \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}})\mathbb{P}(\mathrm{B}) \leqslant \mathbb{P}(\bar{\mathrm{B}})\mathbb{P}(\mathrm{B}) = (1 - \mathbb{P}(\mathrm{B}))\mathbb{P}(\mathrm{B}) \leqslant \frac{1}{4}$

et $\qquad \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \geqslant -\mathbb{P}(\bar{\mathrm{B}})\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \geqslant -\mathbb{P}(\bar{\mathrm{B}})\mathbb{P}(\mathrm{B}) = -(1 - \mathbb{P}(\mathrm{B}))\mathbb{P}(\mathrm{B}) \geqslant -\frac{1}{4}$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{A}^2 \qquad |\mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})| \leqslant \frac{1}{4}}$

L'inégalité est une égalité si $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}}) = \mathbb{P}(\bar{\mathrm{B}})$ et $\mathbb{P}(\bar{\mathrm{B}})\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$ c'est-à-dire $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$ ou $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{B})$ et $\mathbb{P}(\mathrm{B})\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}}) = 0$ c'est-à-dire $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$. Comme $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}})$, on conclut

$$\boxed{\text{L'inégalité est une égalité si et seulement si } \mathbb{P}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{2} \text{ ou } \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}}) = \frac{1}{2}.}$$

Remarque : Il s'agit de l'inégalité dite de *Kosmanek*.

Variante : Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{A}^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_\mathrm{A}, \mathbb{1}_\mathrm{B})| \leqslant \sigma(\mathbb{1}_\mathrm{A})\sigma(\mathbb{1}_\mathrm{B})$$

Or, pour X variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in [0\,;1]$, on a

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{p(1-p)} \leqslant \frac{1}{2}$$

D'après la relation de König-Huygens, il vient

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_\mathrm{A}, \mathbb{1}_\mathrm{B}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_\mathrm{A}\mathbb{1}\mathrm{B}) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_\mathrm{A})\mathbb{E}(\mathbb{1}_\mathrm{B}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_\mathrm{A})\mathbb{E}(\mathbb{1}_\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B})$$

Le résultat suit. Si l'inégalité est une égalité, on a $\sigma(\mathbb{1}_\mathrm{A}) = \sigma(\mathbb{1}_\mathrm{B}) = \frac{1}{4}$ d'où $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}$ puis $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$. La réciproque est immédiate.

Exercice 4 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\sigma_n \sim \mathscr{U}_{\mathrm{S}_n}$. On note X_n le nombre de points fixes de σ_n.

Montrer $\qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 0) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathrm{e}^{-1}$

Corrigé : Notons $\mathrm{D}_{n,k}$ le nombre de permutations de S_n avec k points fixes. La famille $(\{\mathrm{X}_n = k\})_{k\in[\![0\,;\,n]\!]}$ est un système complet d'événements d'où

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = k)$$

Comme σ_n suit la loi uniforme sur S_n, on a

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!] \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = k) = \frac{\mathrm{D}_{n,k}}{n!}$$

Or, choisir une permutation de S_n à k points fixes équivaut à choisir k points fixes puis à choisir une permutation sans point fixe (un *dérangement*) sur les $n-k$ points restants. Comme il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir les points fixes, on a

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!] \qquad \mathrm{D}_{n,k} = \tbinom{n}{k}\mathrm{D}_{n-k,0}$$

Ainsi $$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!] \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = k) = \frac{\binom{n}{k}\mathrm{D}_{n-k,0}}{n!} = \frac{1}{k!}\mathbb{P}(\mathrm{X}_{n-k} = 0)$$

D'où $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\mathbb{P}(\mathrm{X}_{n-k} = 0)$$

Les séries entières $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 0)z^n$ ont des rayons supérieurs à 1 d'où, par produit de Cauchy de séries entières

$$\forall z \in \mathrm{D}(0,1) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 0)z^n\right)$$

d'où $$\forall z \in \mathrm{D}(0,1) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 0)z^n = \frac{\mathrm{e}^{-z}}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)$$

À nouveau par théorème du produit de Cauchy et unicité du développement en série entière, on conclut

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Ainsi $$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-1}}$$

Variante : On peut utiliser la formule du crible (hors-programme donc à retrouver et à redémontrer). On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{A}_{i_j}\right)$$

Par suite, on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_n \neq 0) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \{\sigma_n(k) = k\}\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}(\sigma_n(i_1) = i_1, \ldots, \sigma_n(i_k) = i_k)$$

Comme σ_n suit la loi uniforme sur S_n, on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_n \neq 0) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\tbinom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

Ainsi $$\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{X}_n \neq 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 5 (***)

Peut-on truquer deux dés à six faces de sorte que la somme des points soit équirépartie sur $[\![2\,;\,12]\!]$?

Corrigé : Soient X et Y les résultats des lancers de chaque dé. Les variables aléatoires X, Y à valeurs dans $[\![1\,;\,6]\!]$ sont indépendantes. Supposons que $\mathrm{X}+\mathrm{Y} \sim \mathscr{U}_{[\![2\,;\,12]\!]}$. On a

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{G_X}(t) = \sum_{k=1}^{6} a_k t^k \qquad \mathrm{G_Y}(t) = \sum_{k=1}^{6} b_k t^k \qquad \mathrm{G_{X+Y}}(t) = \frac{1}{11}\sum_{k=2}^{12} t^k$$

avec $a_k = \mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$ et $b_k = \mathbb{P}(\mathrm{Y}=k)$ pour tout $k \in [\![1\,;\,6]\!]$. Par indépendance de X et Y, on obtient

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{G_{X+Y}}(t) = \mathrm{G_X}(t)\mathrm{G_Y}(t)$$

c'est-à-dire $\qquad \forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \left(\sum_{k=1}^{6} a_k t^k\right)\left(\sum_{k=1}^{6} b_k t^k\right) = \frac{1}{11}\sum_{k=2}^{12} t^k$

Après factorisation $\quad \forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad t^2\left(\sum_{k=0}^{5} a_{k+1} t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{5} b_{k+1} t^k\right) = \frac{t^2}{11}\sum_{k=0}^{10} t^k$

Notant T une indéterminée, on a

$$\mathrm{T}^2\left(\sum_{k=0}^{5} a_{k+1}\mathrm{T}^k\right)\left(\sum_{k=0}^{5} b_{k+1}\mathrm{T}^k\right) = \frac{\mathrm{T}^2}{11}\sum_{k=0}^{10}\mathrm{T}^k$$

puisque la différence des deux polynômes admet une infinité de racines. Par suite

$$\left(\sum_{k=0}^{5} a_{k+1}\mathrm{T}^k\right)\left(\sum_{k=0}^{5} b_{k+1}\mathrm{T}^k\right) = \frac{1}{11}\sum_{k=0}^{10}\mathrm{T}^k$$

et $\qquad (\mathrm{T}-1)\left(\sum_{k=0}^{10}\mathrm{T}^k\right) = \mathrm{T}^{11}-1 = \prod_{k=0}^{10}\left(\mathrm{T}-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{11}}\right) = (\mathrm{T}-1)\prod_{k=1}^{10}\left(\mathrm{T}-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{11}}\right)$

d'où $\qquad \left(\sum_{k=0}^{5} a_{k+1}\mathrm{T}^k\right)\left(\sum_{k=0}^{5} b_{k+1}\mathrm{T}^k\right) = \frac{1}{11}\prod_{k=1}^{10}\left(\mathrm{T}-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{11}}\right)$

Il suffit alors d'observer $a_6 b_6 = \dfrac{1}{11} \neq 0$ pour conclure puisque les polynômes intervenant dans le produit à gauche sont de degré 5 donc admettent chacune une racine réelle tandis que le membre de droite n'en admet aucune. Ainsi

$$\boxed{\text{On ne peut piper deux dés pour que leur somme suive une loi uniforme sur } [\![2\,;\,12]\!].}$$

Exercice 6 (***)

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$.

On pose $\qquad \forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{Y}_n = \mathrm{X}_n\mathrm{X}_{n+1}$

1. Déterminer la loi de Y_n pour $n \geqslant 1$.
2. Discuter de l'indépendance de Y_i et Y_j pour $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
3. Montrer $\qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Y}_i - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Corrigé : 1. Soit $n \geqslant 1$. On a $Y_n(\Omega) \subset \{0,1\}$ et $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1, X_{n+1} = 1) = p^2$ par indépendance de X_n et X_{n+1} d'où

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad Y_n \sim \mathscr{B}(p^2)}$$

2. Supposons $i \neq j$ et en particulier $i < j$ sans perte de généralité. Si $j = i+1$, on a

$$\mathbb{P}(Y_i = 1, Y_{i+1} = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1, X_{i+1} = 1, X_{i+2} = 1) = p^3 \neq p^4 = \mathbb{P}(Y_i = 1) \times \mathbb{P}(Y_{i+1} = 1)$$

D'où $\boxed{\text{Les variables aléatoires } Y_i \text{ et } Y_{i+1} \text{ sont dépendantes.}}$

Si $i+1 < j$, comme (X_i, X_{i+1}) et (X_j, X_{j+1}) sont indépendantes puisque $\{i, i+1\} \cap \{j, j+1\} = \varnothing$, il s'ensuit

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } Y_i \text{ et } Y_j \text{ avec } i+1 < j \text{ sont indépendantes.}}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, il vient

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)$$

On a $\displaystyle \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = n\mathbb{V}(Y_1) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1})$

Les couples (Y_i, Y_{i+1}) suivent tous la même loi pour $i \in [\![1\,;\, n-1]\!]$. Ainsi

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = n\mathbb{V}(Y_1) + 2(n-1)\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = O(n)$$

Par suite $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

Exercice 7 (***)

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Dénombrer le cardinal de l'ensemble des couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.
2. Une urne contient n boules. On tire une poignée aléatoirement, on remet les boules dans l'urne et on tire une deuxième poignée. Quelle est la probabilité pour qu'aucune boule n'ait été tirée deux fois ?

Corrigé : 1. Soit $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$. Choisir $X \subset Y$ équivaut à choisir X puis $Z = Y \setminus X$ puisque $Y = X \cup Z$. Ainsi

$$\mathrm{Card}\,\{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, X \subset Y\} = \mathrm{Card}\,\{(X, Z) \in \mathcal{P}(E)^2, Z \in \mathcal{P}(E \setminus X)\}$$

Puis $\displaystyle \{(X, Z) \in \mathcal{P}(E)^2, Z \in \mathcal{P}(E \setminus X)\} = \bigsqcup_{k=0}^{n} \bigsqcup_{X\in\mathcal{P}(E),\mathrm{Card}\,X=k} \mathcal{P}(E \setminus X)$

Par conséquent, il vient

$$\mathrm{Card}\,\{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, X \subset Y\} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{X\in\mathcal{P}(E),\mathrm{Card}\,X=k} \mathrm{Card}\,\mathcal{P}(E \setminus X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Card}\,\{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, X \subset Y\} = 3^n}$

Remarque : On peut aussi choisir Y à k éléments avec $k \in [\![0\,;\, n]\!]$ puis choisir X une partie de Y pour laquelle on a 2^k choix et le résultat suit.

2. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $\widetilde{\mathrm{X}}$, $\widetilde{\mathrm{Z}}$ les variables aléatoires correspondant aux tirages de poignées successifs. On a $\widetilde{\mathrm{X}}$ et $\widetilde{\mathrm{Z}}$ indépendantes de même loi $\mathscr{U}_{\mathcal{P}(\mathrm{E})}$ où E est l'ensemble des boules. On cherche $\mathbb{P}(\widetilde{\mathrm{X}} \cap \widetilde{\mathrm{Z}} = \varnothing)$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\widetilde{\mathrm{X}} \cap \widetilde{\mathrm{Z}} = \varnothing) &= \frac{\mathrm{Card}\ \{(\mathrm{X}, \mathrm{Z}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2, \mathrm{X} \cap \mathrm{Z} = \varnothing\}}{\mathrm{Card}\ \mathcal{P}(\mathrm{E})^2} \\ &= \frac{\mathrm{Card}\ \{(\mathrm{X}, \mathrm{Z}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2, \mathrm{Z} \in \mathcal{P}(\mathrm{E} \setminus \mathrm{X})\}}{\mathrm{Card}\ \mathcal{P}(\mathrm{E})^2}\end{aligned}$$

On conclut
$$\boxed{\mathbb{P}(\widetilde{\mathrm{X}} \cap \widetilde{\mathrm{Z}} = \varnothing) = \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

Remarques : (1) Pour lier plus précisément les deux questions, on peut interpréter le comptage de X, Z parties de E vérifiant $\mathrm{X} \cap \mathrm{Z} = \varnothing$ comme le comptage de X, $\bar{\mathrm{Z}}$ parties de E vérifiant $\mathrm{X} \subset \bar{\mathrm{Z}}$.
(2) Pour le cadre formel, on peut considérer $\Omega = \mathcal{P}(\mathrm{E})^2$ muni de la tribu discrète et de la probabilité uniforme et $\widetilde{\mathrm{X}} : \omega = (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1$, $\widetilde{\mathrm{Z}} : \omega = (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_2$.
(3) On peut aussi reformuler l'énoncé en considérant qu'un tirage de $\mathrm{X} \sim \mathscr{U}_{\mathcal{P}([\![1\,;\, n]\!])}$ (on numérote les éléments de E de 1 à n) équivaut à n tirages indépendants $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ de même loi $\mathscr{B}(1/2)$. Si on dispose de X, on définit $\mathrm{X}_i = \mathbb{1}_{\mathrm{X}}(i)$ pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. Réciproquement, on définit $\mathrm{X} = \{i \in [\![1\,;\, n]\!], \mathrm{X}_i = 1\}$. On peut alors vérifier qu'on a bien les comportements attendus. La probabilité attendue s'écrit alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{\{\mathrm{X}_i = \mathrm{Y}_i = 1\}}\right) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 1, \mathrm{Y}_i = 1)) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Exercice 8 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y indépendantes de loi uniforme sur $\mathcal{P}([\![1\,;\, n]\!])$ avec n entier non nul. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{Card}\ \mathrm{X})$ puis $\mathbb{E}(\mathrm{Card}\ \mathrm{X} \cap \mathrm{Y})$.

Corrigé : Les variables aléatoires X et Y sont finies donc Card X et Card Y également et admettent donc une espérance. On a clairement $(\mathrm{Card}\ \mathrm{X})(\Omega) = (\mathrm{Card}\ \mathrm{X} \cap \mathrm{Y})(\Omega) \subset [\![0\,;\, n]\!]$ et $\mathrm{Card}\ \mathcal{P}([\![1\,;\, n]\!]) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ puisque choisir une partie équivaut à choisir une partie à k éléments pour $k \in [\![0\,;\, n]\!]$ et il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir une partie à k éléments. Puis, on trouve

$$\mathbb{E}(\mathrm{Card}\ \mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(\mathrm{Card}\ \mathrm{X} = k)$$

et comme la variable X suit la loi uniforme

$$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \mathbb{P}(\mathrm{Card}\ \mathrm{X} = k) = \frac{\mathrm{Card}\ \{\mathrm{A} \subset [\![1\,;\, n]\!] \mid \mathrm{Card}\ \mathrm{A} = k\}}{2^n} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$$

autrement dit $\mathrm{Card}\ \mathrm{X} \sim \mathscr{B}(n, 1/2)$. On obtient

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{Card}\ \mathrm{X}) = \frac{n}{2}}$$

Ensuite, il vient $$\mathbb{E}(\text{Card } X \cap Y) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(\text{Card } X \cap Y = k)$$

et comme les variables X et Y sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $\mathcal{P}([\![1\,;\,n]\!])$, alors le couple (X, Y) suit la loi uniforme sur $\mathcal{P}([\![1\,;\,n]\!])^2$ et on a

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!] \qquad \mathbb{P}(\text{Card } X \cap Y = k) = \frac{\text{Card } \{A, B \subset [\![1\,;\,n]\!] \mid \text{Card } A \cap B = k\}}{2^{2n}}$$

Reste donc évaluer ce numérateur qu'on note N. Compter les parties A, B dont l'intersection est de cardinal égal à k équivaut à choisir d'abord cette intersection avec $\binom{n}{k}$ choix possibles puis choisir les éléments de A hors de $A \cap B$ soit choisir $\ell \in [\![0\,;\,n-k]\!]$ éléments avec $\binom{n-k}{\ell}$ choix possibles et choisir les éléments de B qui ne sont pas dans $A \cap B$ soit choisir $p \in [\![0\,;\,n-(k+\ell)]\!]$ éléments avec $\binom{n-(k+\ell)}{p}$ choix possibles. Ainsi, on trouve

$$N = \sum_{\ell=0}^{n-k} \sum_{p=0}^{n-(k+\ell)} \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell}\binom{n-(k+\ell)}{p} = \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^{n-k} 2^{n-(k+\ell)} \binom{n-k}{\ell}$$

On remarque la somme restante est un binôme de Newton développé d'où

$$N = \binom{n}{k} (1+2)^{n-k} = 3^{n-k} \binom{n}{k}$$

et donc $$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!] \qquad \mathbb{P}\,(\text{Card } X \cap Y = k) = \binom{k}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$$

c'est-à-dire $\text{Card } X \cap Y \sim \mathscr{B}(n, 1/4)$ et on conclut

$$\boxed{\mathbb{E}(\text{Card } X \cap Y) = \frac{n}{4}}$$

Exercice 9 (****)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ pour n entier. On appelle *marche aléatoire* la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$.

1. Pour $n \geqslant 1$, préciser $\prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$ et la loi du n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$. Déterminer une expression sous forme de somme pour
$$T_n(f) = \mathbb{E}(f(S_n))$$
3. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en déduire la relation de récurrence
$$\forall n \geqslant 2 \qquad T_n(f) = T_{n-1}(g) \quad \text{avec} \quad g : x \mapsto \frac{f(x+1) + f(x-1)}{2}$$
4. Établir la monotonie de la suite $(\mathbb{E}(|S_n|))_{n \geqslant 1}$.
5. Comparer les suites $(\mathbb{E}(|S_n|))_{n \geqslant 1}$ et $(\sqrt{n})_{n \geqslant 1}$.
6. Déterminer la loi de S_n pour n entier non nul.
7. Montrer que la marche aléatoire repasse une infinité de fois presque sûrement par zéro.

Corrigé : 1. Soit $n \geqslant 1$. On a $$\boxed{\prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega) = \{-1, 1\}^n}$$

On remarque $(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)(\Omega) \subset \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i(\Omega)$ et pour $(x_1,\ldots,x_n) \in \{-1,1\}^n$, il vient par indépendance

$$\mathbb{P}\left((\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n) = (x_1,\ldots,x_n)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = x_i) = \frac{1}{2^n}$$

Ainsi $$\boxed{(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n) \sim \mathscr{U}_{\{-1,1\}^n}}$$

2. Soit $n \geqslant 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a

$$\mathrm{T}_n(f) = \mathbb{E}(f(\mathrm{S}_n)) = \mathbb{E}\left(f\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k\right)\right)$$

Par transfert, on obtient

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \qquad \forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{T}_n(f) = \frac{1}{2^n} \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{-1,1\}^n} f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}$$

3. Soit $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_n(f) &= \frac{1}{2^n} \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{-1,1\}^n} f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\{-1,1\}^{n-1}} \frac{1}{2}\left[f\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 1\right) + f\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i - 1\right)\right]\end{aligned}$$

On conclut $$\boxed{\forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \qquad \forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{T}_n(f) = \mathrm{T}_{n-1}(g)}$$

4. Soit $n \geqslant 1$. On choisit $f = |\cdot|$. On a

$$\mathbb{E}(|\mathrm{S}_{n+1}|) = \mathbb{E}(g(\mathrm{S}_n))$$

Pour x réel, il vient par inégalité triangulaire

$$|x| = \frac{1}{2}\,|x+1+x-1| \leqslant g(x)$$

Par croissance de l'espérance, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{E}(|\mathrm{S}_{n+1}|) \geqslant \mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|)}$$

5. Soit $n \geqslant 1$. Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz ou la positivité de $\mathbb{V}(|\mathrm{S}_n|)$, on obtient

$$\mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|)^2 \leqslant \mathbb{E}((\mathrm{S}_n)^2) = \mathbb{V}(\mathrm{S}_n) = n$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|) \leqslant \sqrt{n}}$$

6. La suite $\left(\dfrac{\mathrm{X}_i+1}{2}\right)_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables indépendantes de loi $\mathscr{B}(1/2)$. Ainsi, on a $\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\mathrm{X}_i+1}{2}\right) \sim \mathscr{B}(n,1/2)$ puis

$$\forall k \in [\![\, 0\,;\, n \,]\!] \qquad \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{X}_i+1}{2}\right) = k\right) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 2k-n) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$$

Ainsi $$\boxed{\forall \ell \in [\![\, -n\,;\, n \,]\!] \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = \ell) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{\frac{\ell+n}{2}} & \text{si } \ell+n \in 2\mathbb{N}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$$

Remarque : Le calcul précédent dit plus précisément que $\mathrm{S}_n(\Omega) = \{2k - n, k \in [\![0\,;\, n]\!]\}$.

7. On pose $\mathrm{S}_0 = 0$. L'événement « la marche aléatoire passe un nombre fini de fois par zéro » s'écrit

$$\mathrm{A} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{\mathrm{S}_{2n} = 0\} \cap \bigcap_{k \geqslant 1} \left\{ \sum_{i=2n+1}^{2n+k} \mathrm{X}_i \neq 0 \right\}$$

autrement dit, la marche aléatoire passe une dernière fois en zéro à l'instant $2n$ pour un certain n entier puis n'y repasse plus. Par incompatibilité et par indépendance de S_{2n} avec $\mathrm{X}_{2n+1}, \mathrm{X}_{2n+2}, \ldots$, il vient

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n} = 0) \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geqslant 1} \left\{ \sum_{i=2n+1}^{2n+k} \mathrm{X}_i \neq 0 \right\} \right)$$

On a égalité en loi pour toutes familles finies extraites de $(\mathrm{X}_i)_{i \geqslant 2n+1}$ et $(\mathrm{X}_i)_{i \geqslant 1}$. Par suite, avec la continuité décroissante, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geqslant 1} \left\{ \sum_{i=2n+1}^{2n+k} \mathrm{X}_i \neq 0 \right\} \right) &= \lim_{\mathrm{K} \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\mathrm{K}} \left\{ \sum_{i=2n+1}^{2n+k} \mathrm{X}_i \neq 0 \right\} \right) \\
&= \lim_{\mathrm{K} \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\mathrm{K}} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \mathrm{X}_i \neq 0 \right\} \right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geqslant 1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \mathrm{X}_i \neq 0 \right\} \right)
\end{aligned}$$

qui est donc une quantité indépendante de n et qu'on peut noter α. Ainsi, on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n} = 0) \alpha$$

Par ailleurs $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n} = 0) = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$

Pour que la somme définissant $\mathbb{P}(\mathrm{A})$ soit convergente, on a donc nécessairement $\alpha = 0$ et par conséquent $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 0$ et on conclut

$$\boxed{\text{La marche aléatoire repasse une infinité de fois par zéro presque sûrement.}}$$

Exercice 10 (***)

Soit $\alpha \in \left[0\,; \dfrac{1}{2} \right[$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \sum_{k=\lfloor \alpha n \rfloor + 1}^{n} \binom{n}{k} \qquad v_n = \sum_{k=\lfloor \alpha n \rfloor + 1}^{n} \ln(k) \binom{n}{k}$$

Déterminer un équivalent simple de u_n et v_n pour $n \to +\infty$.

Corrigé : Soit n entier. On a l'équivalence pour k entier

$$k \geqslant \lfloor \alpha n \rfloor + 1 \iff k > \alpha n$$

puis $\qquad u_n = 2^n \displaystyle\sum_{\alpha n < k \leqslant n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = 2^n \mathbb{P}(\mathrm{S}_n > \alpha n) \quad$ et $\quad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n > \alpha n) = \mathbb{P}\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n} - \dfrac{1}{2} > -\varepsilon \right)$

avec $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ où $(\mathrm{X}_k)_{k \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(1/2)$ et $\varepsilon = \dfrac{1}{2} - \alpha > 0$. Puis, on observe

$$\left\{\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\right\}=\left\{-\varepsilon<\frac{\mathrm{S}_n}{n}-\frac{1}{2}<\varepsilon\right\}\subset\left\{\frac{\mathrm{S}_n}{n}-\frac{1}{2}>-\varepsilon\right\}$$

D'après la loi faible des grands nombres, il vient

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\right)=1-\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geqslant\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

d'où par comparaison

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n>\alpha n)\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

On conclut

$$\boxed{u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}2^n}$$

Par croissance de ln, il vient

$$\ln(\alpha n)\sum_{\alpha n<k\leqslant n}\binom{n}{k}\leqslant v_n\leqslant\ln(n)\sum_{\alpha n<k\leqslant n}\binom{n}{k}$$

d'où

$$\ln(\alpha n)u_n\leqslant v_n\leqslant\ln(n)u_n$$

Ainsi

$$\boxed{v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)2^n}$$