ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 22/01/2026

Commentaires - Devoir en temps libre n°13

Problème I

1. Il ne faut pas omettre de préciser, après avoir vérifié l'injectivité, que l'on considère un endomorphisme en dimension finie. Enfin, beaucoup oublient la vérification de $u^{-1} \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$.

2. Il s'agit du théorème spectral (et non spectrale !) et il faut donc le citer ! Il n'est pas utile d'en refaire la démonstration, c'est un résultat du cours.

3.(a) OK.

3.(b) OK mais il faut tout de même justifier que $\alpha \in [\,\lambda_{\min}\,;\lambda_{\max}\,]$ puis détailler la majoration sur $[\,\lambda_{\min}\,;\alpha\,]$ et sur $[\,\alpha\,;\lambda_{\max}\,]$.

4. Des choses parfois très maladroites pour la première inégalité ! On développe $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$: tous les étudiants d'une classe de MP doivent réussir aisément une telle question. La suite est bien traitée pour une très grande majorité.

5. Pour le calcul de $\left\langle \left(\dfrac{1}{\alpha}u + \alpha u^{-1}\right)(x), x \right\rangle$ avec $x \in \mathrm{E}$, il faut décomposer $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ puis $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$ en utilisant impérativement un autre indice pour pouvoir ensuite développer par bilinéarité. À reprendre pour ceux qui ont négligé ce point.

6. OK.

Problème II

Il s'agissait ici, en grande partie, de synthétiser des résultats rencontrés dans d'autres exercices corrigés en classe.

Pour l'existence de la racine carrée matricielle dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, on peut procéder matriciellement. En revanche, pour l'unicité, il faut considérer les endomorphismes canoniquement associés afin de pouvoir travailler sur les endomorphismes induits. À reprendre pour plusieurs.

La bijectivité de φ a été prouvé en détail en classe entière : il suffisait de faire l'effort d'une reprise ce que tous n'ont pas fait... Pour la continuité, il faut invoquer celle du produit matriciel et non un argument de bilinéarité : ⚠ pour évoquer la continuité d'une application bilinéaire, il faut que celle-ci agisse sur un produit d'espaces vectoriels ce qui n'est pas le cas ici.

Parmi ceux qui ont montré la continuité de φ^{-1}, certains ont établi la continuité de la racine carrée sur $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ (déjà vue en classe) ce que je trouve dommage puisqu'en faisant cela, il n'y a plus aucune initiative personnelle de recherche ...