Corrigé du devoir en temps libre n°14

Problème I

1. On procède par récurrence. L'initialisation pour $k = 0$ est immédiate et l'hérédité découle directement du caractère sous-additif de la suite. Ainsi

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad u_{km+r} \leqslant k u_m + u_r}$$

2. L'ensemble $\left\{\dfrac{u_k}{k}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée (par zéro) et admet donc une borne inférieure finie. Ainsi

$$\boxed{\text{La borne inférieure L est bien définie.}}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne inférieure L, on dispose de m entier non nul tel que

$$\boxed{\mathrm{L} \leqslant \frac{u_m}{m} \leqslant \mathrm{L} + \varepsilon}$$

Soit n entier. On effectue la division euclidienne de n par m avec $n = qm + r$ et $r \in [\![0\,;\, m-1]\!]$. D'après le résultat de la question 1, on a

$$u_n = u_{qm+r} \leqslant q u_m + u_r$$

Puis, il vient

$$\mathrm{L} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_m}{m}\frac{qm}{n} + \frac{u_r}{n} \leqslant (\mathrm{L}+\varepsilon)\frac{qm}{n} + \frac{\mathrm{M}}{n} \leqslant \mathrm{L} + \varepsilon + \frac{\mathrm{M}}{n}$$

où $\mathrm{M} = \underset{0 \leqslant k \leqslant m-1}{\mathrm{Max}}\, u_k$. On a $\dfrac{\mathrm{M}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et pour n assez grand, on obtient

$$\mathrm{L} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \mathrm{L} + 2\varepsilon$$

On conclut

$$\boxed{\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{L}}$$

4. Soient m et n des entiers non nuls. On a

$$\{\mathrm{S}_{m+n} - \mathrm{S}_n \geqslant na\} \cap \{\mathrm{S}_m \geqslant ma\} \subset \{\mathrm{S}_{m+n} \geqslant (n+m)a\}$$

D'où

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} - \mathrm{S}_n \geqslant na, \mathrm{S}_m \geqslant ma\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} \geqslant (n+m)a\right)$$

Or, les variables $\mathrm{S}_{m+n} - \mathrm{S}_m = \sum\limits_{k=m+1}^{m+n} \mathrm{X}_k$ et $\mathrm{S}_m = \sum\limits_{k=1}^{m} \mathrm{X}_k$ sont indépendantes par coalition d'où

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} - \mathrm{S}_m \geqslant na\right)\mathbb{P}(\mathrm{S}_m \geqslant ma) \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} \geqslant (n+m)a\right)}$$

En observant que $\mathrm{S}_{m+n} - \mathrm{S}_m$ et S_n ont même loi comme somme de m variables aléatoires indépendantes de même loi, on trouve

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na)\mathbb{P}(\mathrm{S}_m \geqslant ma) \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} \geqslant (n+m)a\right)}$$

5. On a $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{\mathrm{X}_i \geqslant a\} \subset \{\mathrm{S}_n \geqslant na\}$ d'où

$$0 < \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant a)^n \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na)$$

Passant au logarithme, on obtient que la suite $(-\ln(\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na)))_n$ est à valeurs positives et sous-additive. D'après le résultat de la question précédente, on conclut

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{1}{n}\ln(\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na))\right)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente.}}$$

Remarque : Il s'agit d'un résultat de *grandes déviations.*

Problème II

1. Pour $t \in [-\tau\,;\tau]$, on a $0 \leqslant \mathrm{e}^{t\mathrm{X}} \leqslant \mathrm{e}^{\tau|\mathrm{X}|}$ ce qui prouve $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}) < \infty$. Par ailleurs, pour $(a,b) \in \mathrm{I}^2$ avec $a < b$ et $t \in [a\,;b]$, on a $tx \leqslant bx$ si $x \geqslant 0$ et $tx \leqslant ax$ si $x \leqslant 0$ d'où

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{t\mathrm{X}} \leqslant \mathrm{e}^{a\mathrm{X}} + \mathrm{e}^{b\mathrm{X}}$$

ce qui prouve $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}) < \infty$ pour $t \in [a\,;b]$ par comparaison. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est définie sur un intervalle de } \mathbb{R} \text{ contenant } [-\tau\,;\tau].}$$

2. Les fonctions u_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\tau\,;\tau[$ en tant que composées de telles fonctions. Par dérivation, pour k entier, on trouve

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times\,]-\tau\,;\tau[\qquad u_n^{(k)}(t) = x_n^k \mathrm{e}^{tx_n}\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$$

Soit $a \in [0\,;\tau[$. Il vient pour n entier

$$\|u_n^{(k)}\|_{\infty,[-a\,;a]} \leqslant |x_n|^k\,\mathrm{e}^{(a-\tau)|x_n|}\mathrm{e}^{\tau|x_n|}\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$$

La fonction $u \mapsto u^k \mathrm{e}^{(a-\tau)u}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ de limite nulle en $+\infty$ et est donc bornée sur $[0\,;+\infty[$. Il en résulte

$$\boxed{\|u_n^{(k)}\|_{\infty,[-a\,;a]} = \mathrm{O}\left(\mathrm{e}^{\tau|x_n|}\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)\right)}$$

3. Par transfert $\qquad \forall t \in [-\tau\,;\tau] \qquad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{tx_n}\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$

La série $\sum u_n$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\tau\,;\tau[$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment inclus dans $]-\tau\,;\tau[$. On conclut

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{C}^\infty(]-\tau\,;\tau[,\mathbb{R})}$$

4. Soit n entier non nul et $t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$. Par croissance de $u \mapsto \mathrm{e}^{tu}$, il vient

$$\{\mathrm{S}_n \geqslant na\} \subset \left\{\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} \geqslant \mathrm{e}^{tna}\right\}$$

On a $\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i}$ qui est d'espérance finie en tant que produit de variables aléatoires indépendantes d'espérance finie et

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i}) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}})^n$$

D'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire positive $\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}$, on obtient

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} \geqslant \mathrm{e}^{tna}) \leqslant \mathrm{e}^{-tna}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n})$$

Enfin, la variable $\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}$ est positive, non nulle presque sûrement donc d'espérance strictement positive et on conclut

$$\boxed{\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+ \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na) \leqslant \exp\left(n\chi(t)\right) \quad \text{avec} \quad \chi(t) = \ln \varphi(t) - ta}$$

5. Avec $n = 1$ dans l'inégalité précédemment établie, on trouve

$$\forall t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+ \qquad 0 < \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant a) \leqslant \exp \chi(t)$$

D'où
$$\boxed{\forall t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+ \qquad \chi(t) \geqslant \ln \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant a)}$$

6. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\tau\,;\tau\,[$ et d'après le théorème de Taylor-Young, il vient

$$\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} \varphi(0) + \varphi'(0)t + \mathrm{o}(t)$$

Par dérivation d'une somme de série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, on a

$$\forall t \in\,]-\tau\,;\tau\,[\qquad \varphi'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathrm{e}^{tx_n} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$$

puis
$$\varphi'(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n) = \mathbb{E}(\mathrm{X})$$

Ainsi
$$\boxed{\varphi(t) = 1 + t\mathbb{E}(\mathrm{X}) + \mathrm{o}(t)}$$

7. Puis $\qquad \chi(t) = \ln\left(1 + t\mathbb{E}(\mathrm{X}) + \mathrm{o}(t)\right) - ta = t\left(\mathbb{E}(\mathrm{X}) - a + \mathrm{o}(1)\right) \underset{t\to 0}{\sim} t\,\underbrace{\left(\mathbb{E}(\mathrm{X}) - a\right)}_{<0}$

On en déduit que la fonction χ prend des valeurs strictement négatives et par conséquent

$$\boxed{\eta_a < 0}$$

8. Soit n entier. La fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{nu}$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, on a

$$\operatorname*{Inf}_{t \in \mathrm{I}\cap\mathbb{R}_+} \exp\left(n\chi(t)\right) = \exp\left(n \operatorname*{Inf}_{t\in\mathrm{I}\cap\mathbb{R}_+} \chi(t)\right)$$

Par passage à la borne inférieure, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na) \leqslant r^n \quad \text{avec} \quad r = \mathrm{e}^{\eta_a} \in [\,0\,;1\,[}$$

Remarque : On peut procéder plus grossièrement : comme $\eta_a < 0$, on dispose de $t_0 \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$ tel que $\chi(t_0) < 0$ et le choix de $r = \mathrm{e}^{\chi(t_0)}$ fait l'affaire.