ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

B. Landelle

Table des matières

Dans ce qui suit, l'ensemble $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et l'ensemble I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide non réduit à un point.

Rappels : Soient E, F des $\mathbb{K}$-ev et $\Phi \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Notant $\mathrm{S_L}$ l'ensemble des solutions de l'équation linéaire (L) : $\Phi(x) = b$ d'inconnue $x \in \mathrm{E}$ avec $b \in \mathrm{F}$, a on a $\mathrm{S_L} = \varnothing$ ou $\mathrm{S_L} = x_\mathrm{P} + \operatorname{Ker} \Phi$ avec $x_\mathrm{P} \in \mathrm{S_L}$.

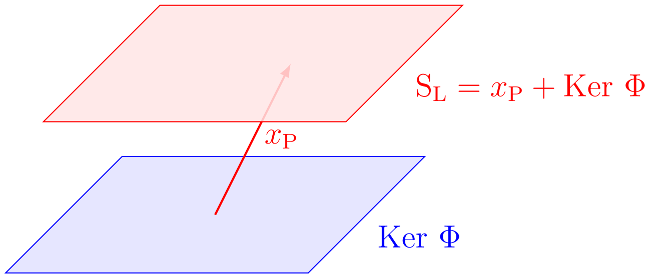

FIGURE 1 – Espace affine de solutions

Vocabulaire : Une équation différentielle d'ordre p est dite sous *forme normalisée* si elle s'écrit

$$x^{(p)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(p-1)}\right)$$

I Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

1 Définitions

Définition 1. *Une* équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 sur I *est une équation de la forme*

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{L}$$

avec a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. Une solution *de* (L) *est une application $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ dérivable telle que*

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad f'(t) = a(t)f(t) + b(t)$$

Vocabulaire : L'équation

$$x' = a(t)x \tag{H}$$

est appelée *équation homogène* associée à l'équation (L). Le terme b est appelé *second membre*.

Notations : On note $\mathrm{S_L}$ l'ensemble des solutions de (L) et $\mathrm{S_H}$ l'ensemble des solutions de (H).

Proposition 1. *Soient a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1*

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{L}$$

Toute solution de (L) *ou de* (H) *est dans $\mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.*

Démonstration. Si $x \in \mathrm{S_L}$, alors $x' = ax + b \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ d'où $x \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. Le cas de $\mathrm{S_H}$ s'obtient avec $b = 0$. □

2 Problème de Cauchy

Définition 2. *Soient a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et $(t_0, x_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}$. Le système*

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) & \text{(L)} \\ x(t_0) = x_0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

est dit problème de Cauchy. *L'équation (CI) est la* condition initiale *du problème de Cauchy.*

Remarque : Ce problème de Cauchy peut aussi s'écrire sous *forme intégrale* :

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [a(s)x(s) + b(s)]\ \mathrm{d}s$$

Théorème 1 (Théorème de Cauchy linéaire). *Soient a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et $(t_0, x_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) & \text{(L)} \\ x(t_0) = x_0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

Démonstration. On pose $\mathrm{A} : t \mapsto \int_{t_0}^{t} a(s)\ \mathrm{d}s$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)} \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(s)} b(s)\ \mathrm{d}s \right]$ est solution du problème. Si x est solution, on pose $\lambda : t \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)} x(t)$. La fonction λ est dérivable avec $\lambda'(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)} b(t)$ pour $t \in \mathrm{I}$. L'unicité s'ensuit après intégration. □

3 Forme des solutions

Théorème 2. *Soit $a \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre* 1

$$x' = a(t)x \tag{H}$$

Alors $\qquad \mathrm{S_H} = \mathrm{Vect}\,(\varphi) \quad$ *avec* $\quad \varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)} \quad$ *et* $\quad \mathrm{A}(t) = \int^{t} a(s)\ \mathrm{d}s$

En particulier, l'ensemble $\mathrm{S_H}$ est une droite vectorielle de $\mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.

Démonstration. Soit x dérivable. On a

$$x' = a(t)x \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)} x(t) \right] = 0$$

d'où le résultat. □

Corollaire 1. *Soient a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et l'équation différentielle linéaire d'ordre* 1

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{L}$$

L'ensemble $\mathrm{S_L}$ est une droite affine de $\mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ de direction $\mathrm{S_H}$, plus précisément

$$\mathrm{S_L} = x_\mathrm{P} + \mathrm{Vect}\,(\varphi) \quad \textit{avec} \quad \varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)} \quad \textit{et} \quad x_\mathrm{P} \in \mathrm{S_L}$$

Démonstration. D'après le théorème de Cauchy linéaire, il existe une solution $x_\mathrm{P} \in \mathrm{S_L}$ (choisir $t_0 \in \mathrm{I}$ et une condition initiale x_0). Puis, on a

$$x \in \mathrm{S_L} \iff x - x_\mathrm{P} \in \mathrm{S_H}$$

et l'ensemble $x_\mathrm{P} + \mathrm{S_H}$ est inclus dans $\mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. □

Vocabulaire : On appelle *courbes intégrales* de (L) les graphes des solutions de (L).

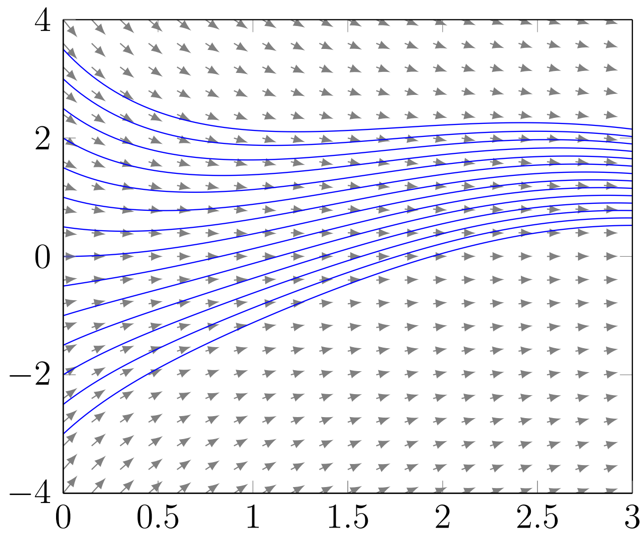

FIGURE 2 – Courbes intégrales de $x' = -\dfrac{1}{1+t}x + \sin t$

Proposition 2 (Principe de superposition). *Soient φ_1, φ_2 des solutions respectives de*

$$x' = a(t)x + b_1(t) \tag{L$_1$}$$

$$x' = a(t)x + b_2(t) \tag{L$_2$}$$

avec $a, b_1, b_2 \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. Alors pour $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$, l'application $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$ est solution de

$$x' = a(t)x + \alpha_1 b_1(t) + \alpha_2 b_2(t)$$

Démonstration. Immédiate. □

Proposition 3 (Variation de la constante). *Soient a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et l'équation différentielle linéaire d'ordre* 1

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{L}$$

Soit φ solution non nulle de l'équation homogène associée et $\lambda : \mathrm{I} \to \mathrm{K}$ dérivable. Alors, la fonction φ ne s'annule pas sur I et on a

$$\lambda\varphi \in \mathrm{S_L} \iff \varphi\lambda' = b \iff \lambda' = b/\varphi$$

Démonstration. On a

$$\lambda\varphi \in \mathrm{S_L} \iff \lambda'\varphi + \lambda\varphi' = a\lambda\varphi + b \iff \lambda'\varphi = b$$

En supposant φ non nulle, on a mieux à savoir que la fonction φ ne s'annule pas puisque $\varphi \in \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}\right)$ avec A primitive de a. Ainsi, on a

$$\lambda\varphi \in \mathrm{S_L} \iff \lambda' = b/\varphi$$

et le choix de λ s'ensuit par intégration. □

Remarque : Cette technique permet de trouver le choix de solution faite pour la démonstration du théorème de Cauchy linéaire, obtenue en posant $x = \lambda\varphi$.

II Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

1 Définitions

Définition 3. *Une* équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 sur I *est une équation de la forme*

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \tag{L}$$

avec a, b, c dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. *Une* solution *de* (L) *est une application* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ *deux fois dérivable telle que*

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad f''(t) = a(t)f'(t) + b(t)f(t) + c(t)$$

Vocabulaire : L'équation

$$x'' = a(t)x' + b(t)x \tag{H}$$

est appelée *équation homogène* associée à l'équation (L). Le terme c est appelé *second membre.*

Notations : On note $\mathrm{S_L}$ l'ensemble des solutions de (L) et $\mathrm{S_H}$ l'ensemble des solutions de (H).

Proposition 4. *Soient a, b, c dans* $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ *et l'équation différentielle linéaire d'ordre 2*

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \tag{L}$$

Toute solution de (L) *ou de* (H) *est dans* $\mathscr{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.

Démonstration. Si $x \in \mathrm{S_L}$, alors $x'' = ax' + bx + c \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ d'où $x \in \mathscr{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. Le cas de $\mathrm{S_H}$ s'obtient avec $c = 0$. □

2 Problème de Cauchy

Définition 4. *Soient a, b, c dans* $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ *et* $(t_0, x_0, v_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}^2$. *Le système*

$$\begin{cases} x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) & \text{(L)} \\ (x(t_0), x'(t_0)) = (x_0, v_0) & \text{(CI)} \end{cases}$$

est dit problème de Cauchy. *Les équations* (CI) *constituent les* conditions initiales *du problème de Cauchy.*

Théorème 3 (Cauchy linéaire). *Soient a, b, c dans* $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ *et* $(t_0, x_0, v_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}^2$. *Il existe une unique solution au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) & \text{(L)} \\ (x(t_0), x'(t_0)) = (x_0, v_0) & \text{(CI)} \end{cases}$$

[Admis]

3 Forme des solutions

Théorème 4. *Soient a, b, c dans* $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ *et l'équation différentielle linéaire d'ordre 2*

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \tag{L}$$

L'ensemble $\mathrm{S_H}$ *est un plan vectoriel de* $\mathscr{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ *et l'ensemble* $\mathrm{S_L}$ *est un plan affine de* $\mathscr{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ *de direction* $\mathrm{S_H}$.

Démonstration. Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, $\mathrm{F} = \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et $\Phi : \mathrm{E} \to \mathrm{F}, x \mapsto x'' - ax' - bx$. On a $\Phi \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, $\mathrm{S_H} = \mathrm{Ker}\ \Phi$. D'après le théorème de Cauchy linéaire, quitte à choisir des conditions initiales, l'équation (L) admet une solution donc $\mathrm{S_L}$ est non vide d'où $\mathrm{S_L} = x_{\mathrm{P}} + \mathrm{Ker}\ \Phi$ avec $x_{\mathrm{P}} \in \mathrm{S_L}$, sous-espace affine de $\mathscr{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.

Soit $t_0 \in \mathrm{I}$ et $\Phi_0 : \mathrm{S_H} \to \mathbb{K}^2, x \mapsto (x(t_0), x'(t_0))$. On a clairement $\Phi_0 \in \mathscr{L}(\mathrm{S_H}, \mathbb{K}^2)$ et d'après le théorème de Cauchy linéaire, l'application Φ_0 est un isomorphisme d'où $\dim \mathrm{S_H} = \dim \mathbb{K}^2 = 2$. □

Proposition 5 (Principe de superposition). *Soient φ_1, φ_2 des solutions respectives de*

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c_1(t) \tag{L$_1$}$$

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c_2(t) \tag{L$_2$}$$

avec $a, b, c_1, c_2 \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. Alors pour $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$, l'application $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$ est solution de

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + \alpha_1 c_1(t) + \alpha_2 c_2(t)$$

Démonstration. Immédiate. □

4 Wronskien

Définition 5. *Soient a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2*

$$x'' = a(t)x' + b(t)x \tag{H}$$

On appelle système fondamental de solutions *de l'équation* (H) *toute base (φ, ψ) de $\mathrm{S_H}$.*

Définition 6. *Soient a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. On appelle* wronskien *de deux solutions (φ, ψ) de l'équation homogène*

$$x'' = a(t)x' + b(t)x \tag{H}$$

la fonction notée W définie par

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{W}(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix}$$

Théorème 5. *Soient a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2*

$$x'' = a(t)x' + b(t)x \tag{H}$$

Le wronskien W de deux solutions (φ, ψ) de l'équation homogène (H) vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$\mathrm{W}' = a(t)\mathrm{W}$$

Démonstration. On a $\mathrm{W} = \varphi\psi' - \varphi'\psi$ dérivable puis

$$\mathrm{W}' = \varphi\psi'' - \psi\varphi'' = \varphi(a\psi' + b\psi) - \psi(a\varphi' + b\varphi) = a(\varphi\psi' - \varphi'\psi) = a\mathrm{W}$$

d'où le résultat. □

Exemple : Le wronskien d'un couple de solutions de l'équation $x'' + q(t)x = 0$ est constant.

Corollaire 2. *Le wronskien W de deux solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 vérifie*

$$\mathrm{W} = 0 \iff \exists t_0 \in \mathrm{I} \quad | \quad \mathrm{W}(t_0) = 0$$

Démonstration. Le sens direct est immédiat. La réciproque résulte de l'unicité du théorème de Cauchy linéaire puisque la fonction nulle est solution de $x' = a(t)x$, $x(t_0) = 0$. $\square$

Théorème 6. *Soient a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et (φ, ψ) deux solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2*

$$x'' = a(t)x' + b(t)x \tag{H}$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *(φ, ψ) système fondamental de solutions de* (H) *;*
2. W *ne s'annule pas sur* I.

Démonstration. Soit $t_0 \in \mathrm{I}$. L'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{S}_{\mathrm{H}}^2 & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \\ (\varphi, \psi) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \varphi(t_0) & \psi(t_0) \\ \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'après le théorème de Cauchy-linéaire. Ainsi, on a $\mathrm{rg}\,(\varphi, \psi) = \mathrm{rg}\;\Phi(\varphi, \psi)$ et le résultat suit. $\square$

III Recherche de solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2

1 Équations à coefficients constants

Définition 7. *Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants*

$$x'' + ax' + bx = 0 \tag{H}$$

On appelle équation caractéristique *de* (H) *l'équation*

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{R}$$

Théorème 7. *Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2*

$$x'' + ax' + bx = 0 \tag{H}$$

1. *Si l'équation* (R) *admet deux racines distinctes α et β*

$$x \in \mathrm{S_H} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \lambda \mathrm{e}^{\alpha t} + \mu \mathrm{e}^{\beta t}$$

2. *Si l'équation* (R) *admet une racine double α*

$$x \in \mathrm{S_H} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = (\lambda t + \mu) \mathrm{e}^{\alpha t}$$

3. *Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et si l'équation* (R) *admet deux racines complexes conjuguées $r \pm \mathrm{i}s$ $(s \neq 0)$*

$$x \in \mathrm{S_H} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \mathrm{e}^{rt} \left[\lambda \cos(st) + \mu \sin(st) \right]$$

Remarques : (a) Le troisième cas (qui est un sous-cas du premier) fournit une expression réelle de la solution de l'équation différentielle à coefficients réels.
(b) On pourrait rajouter l'unicité à l'existence des scalaires λ et μ dans chaque cas.

Démonstration. Par récurrence, on vérifie que les solutions sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On note $\mathrm{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$ et D l'endomorphisme de dérivation de E dans E. On a $\mathrm{S_H} = \mathrm{Ker}\, \mathrm{P(D)}$ où $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$.

1. Si (R) admet deux racines distinctes α, β, on a d'après le lemme des noyaux

$$\mathrm{S_H} = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{D} - \alpha\,\mathrm{id}\,) \circ (\mathrm{D} - \beta\,\mathrm{id}\,) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{D} - \alpha\,\mathrm{id}\,) \oplus \mathrm{Ker}\,(\mathrm{D} - \beta\,\mathrm{id}\,)$$

et le résultat suit.

3. Si (R) admet deux racines complexes conjuguées $r \pm \mathrm{i}s$ avec $s \neq 0$, le résultat précédent s'applique d'où $t \mapsto \mathrm{e}^{(r+\mathrm{i}s)t}$ solution (non réelle) de (H). Considérant partie réelle et imaginaire, les fonctions $t \mapsto \mathrm{Re}\ \mathrm{e}^{(r+\mathrm{i}s)t}$ et $t \mapsto \mathrm{Im}\ \mathrm{e}^{(r+\mathrm{i}s)t}$ sont solutions réelles de (H) et on vérifie sans peine qu'elles forment une famille libre donc une base dans le plan vectoriel réel $\mathrm{S_H}$.

2. Si (R) admet une racine double α. On note $e_\alpha : t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$ et on pose $y = e_{-\alpha}x$ ce qui équivaut à $x = e_\alpha y$. On a $(\mathrm{D} - \alpha\,\mathrm{id}\,)(x) = e_\alpha y'$ puis $(\mathrm{D} - \alpha\,\mathrm{id}\,)^2(x) = e_\alpha y''$. Le résultat suit. □

Remarques : (a) On peut aussi considérer les couples de solutions annoncées et vérifier dans chaque cas qu'ils forment bien un système fondamental de solutions mais ça n'explique pas le choix des solutions en question.

(b) On peut procéder avec des techniques de réduction. On pose $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ et on a $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$. On réduit la matrice A et notant P la matrice de passage vers la base de réduction, on pose $\mathrm{X} = \mathrm{PY}$ avec $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Ainsi, on obtient un nouveau système différentiel linéaire $\mathrm{Y}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{APY}$ plus simple (diagonale ou triangulaire) que l'on sait résoudre. On revient à une formulation en X avec $\mathrm{X} = \mathrm{PY}$ et on voit, par le biais de dernier produit matriciel, que $x(t)$ sera une combinaison linéaire des composantes de $\mathrm{Y}(t)$.

Proposition 6. *Soit* $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *et* $m \in \mathbb{K}$. *L'équation*

$$x'' + ax' + bx = \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{mt} \qquad \text{(L)}$$

admet une solution particulière de la forme

1. $x_0 : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{mt}$ *si* m *pas racine de* (R)
2. $x_0 : t \in \mathbb{R} \mapsto t\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{mt}$ *si* m *racine simple de* (R)
3. $x_0 : t \in \mathbb{R} \mapsto t^2\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{mt}$ *si* m *racine double de* (R)

avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *et* $\deg \mathrm{Q} = \deg \mathrm{P}$.

Remarque : Avec $m = 0$, on a le cas d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et avec un second membre polynomial.

Démonstration. Notons $n = \deg \mathrm{P}$.
1. Pour $x_0 : t \mapsto \mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{mt}$, on a

$$x_0'' + ax_0' + bx_0 = \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{mt} \iff (m^2 + am + b)\mathrm{Q} + (2m + a)\mathrm{Q}' + \mathrm{Q}'' = \mathrm{P}$$

On pose $\qquad \forall \mathrm{Q} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \qquad \Phi(\mathrm{Q}) = (m^2 + am + b)\mathrm{Q} + (2m + a)\mathrm{Q}' + \mathrm{Q}''$

On a clairement $\deg \Phi(\mathrm{Q}) = \deg \mathrm{Q}$ pour $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ puis $\Phi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_n[\mathrm{X}])$ et $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$ d'où Φ isomorphisme. Le résultat suit.
2, 3. On procède comme au 1. $\square$

2 Variation des constantes

Théorème 8. *Soient a, b, c dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et l'équation différentielle linéaire d'ordre 2*

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \tag{L}$$

Étant donné un système fondamental (φ, ψ) de solutions de l'équation homogène (H), une solution de (L) est fournie par $t \mapsto \lambda(t)\varphi(t) + \mu(t)\psi(t)$ avec $\lambda, \mu : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ dérivables et vérifiant

$$\begin{cases} \lambda'(t)\varphi(t) + \mu'(t)\psi(t) & = 0 \\ \lambda'(t)\varphi'(t) + \mu'(t)\psi'(t) & = c(t) \end{cases}$$

Démonstration. Le système est de Cramer car son déterminant, le wronskien, ne s'annule pas sur I d'après le corollaire 2. On choisit (λ, μ) telle que (λ', μ') solution du système. On pose $x = \lambda\varphi + \mu\psi$. On a x dérivable puis

$$x' = \lambda\varphi' + \mu\psi' \text{ dérivable} \quad \text{et} \quad x'' = \lambda'\varphi' + \mu'\psi' + \lambda\varphi'' + \mu\psi''$$

Ainsi $$x'' = c + \lambda a\varphi' + \lambda b\varphi + \mu a\psi' + \mu b\psi = c + ax' + bx$$

d'où le résultat annoncé. $\square$

Exemple : Résoudre sur $\mathrm{I} = \left] -\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2} \right[$ l'équation différentielle

$$x'' + x = \frac{1}{\cos(t)} \tag{L}$$

On a clairement $\mathrm{S_H} = \operatorname{Vect}(\cos, \sin)$. Cherchons une solution de la forme $x = \lambda \cos + \mu \sin$ avec λ, μ dérivables. On obtient

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\cos(t)} \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à $$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\cos(t)} \end{pmatrix}$$

d'où $$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \lambda'(t) = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)} \quad \text{et} \quad \mu'(t) = 1$$

Ainsi $$\mathrm{S_L} = \{t \in \mathrm{I} \mapsto \alpha\cos(t) + \beta\sin(t) + \cos(t)\ln(\cos(t)) + t\sin(t), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

3 Solutions développables en série entière

Soit l'équation $$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t) \tag{L}$$

sur un intervalle I. On suppose que a, b, c sont polynomiales et d est développable en série entière. On peut alors envisager de chercher une solution de (L) qui soit développable en série entière *i.e.* une solution x sous la forme $x(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Pour $t \in \left]-\mathrm{R} ; \mathrm{R}\right[$ avec R supposé > 0, il vient par dérivation de séries entières

$$x(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n,\quad x'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nt^{n-1},\quad x''(t)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}$$

Ensuite :

— on injecte ces expressions dans (L) et on distribue les produits ;
— on procède à des changements d'indice pour avoir partout les mêmes puissances de t ;
— on rassemble les puissances de t par linéarité de Σ car on travaille dans l'intervalle de convergence ;
— on utilise l'unicité du développement en série entière pour obtenir une relation sur les coefficients a_n ;
— on détermine une expression des a_n (par récurrence ou avec un produit téléscopique) ;
— on s'assure que le rayon de convergence R est non nul (série entière non dégénérée) avec $\mathrm{I}\subset\,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$;
— enfin, on exprime $x(t)$ avec des fonctions usuelles (si c'est possible).

Exemple : Déterminons une solution développable en série entière de

$$tx''+2x'-tx=0 \tag{H}$$

Pour $t\in\,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$ avec R supposé >0, on a

$$x(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n,\quad x'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nt^{n-1}, x''(t)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}$$

On injecte dans (H) :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}2na_nt^{n-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^{n+1}=0$$

Avec un changement d'indice dans la dernière somme, on obtient

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}2na_nt^{n-1}-\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}t^{n-1}=0$$

En isolant le premier terme de la seconde somme, on peut ensuite rassembler les trois sommes par linéarité :

$$2a_1+\sum_{n=2}^{+\infty}\left[n(n+1)a_n-a_{n-2}\right]t^{n-1}=0$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit

$$\begin{cases}a_1=0\\ n(n+1)a_n-a_{n-2}=0\quad \forall n\geqslant 2\end{cases}$$

Une récurrence immédiate donne

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad a_{2n+1}=0\quad\text{et}\quad a_0\neq 0\Longrightarrow a_{2n}\neq 0\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

Pour obtenir une expression simple de a_{2n}, on écrit un produit téléscopique

$$a_{2n}=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{a_{2k}}{a_{2(k-1)}}\right]\times a_0=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(2k+1)(2k)}\right]\times a_0=\frac{a_0}{(2n+1)!}$$

On trouve un rayon de convergence $\mathrm{R}=+\infty$ puis on identifie

$$x=a_0\varphi\quad\text{avec}\quad\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}(t)}{t} & \text{si } t\neq 0\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$$

Remarque : Souvent, on ne trouve pas toutes les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 en recherchant celles qui sont développables en série entière. Si l'équation est normalisée, homogène et qu'on a une solution développable en série entière définie à constante multiplicative près (a_0 ou a_1 en facteur le plus souvent), on a donc une droite vectorielle de solutions. Or on sait que l'espace des solutions est un plan vectoriel. On peut donc ensuite mettre en œuvre la *méthode du wronskien* ou *méthode de Lagrange* pour déterminer toutes les solutions.

Application :
Soit f une fonction développable en série entière en zéro. Si f est solution d'un problème de Cauchy d'ordre 1 ou 2 à coefficients polynomiaux, on peut alors alors déterminer le développement de f en cherchant une solution développable en série entière à ce problème de Cauchy et en concluant grâce à l'unicité du théorème de Cauchy linéaire.

Exemple : Déterminer le développement en série entière de $x(t) = \sin(t)$. La fonction sin est solution du problème de Cauchy

$$(\mathrm{C}) : \begin{cases} x'' + x = 0 \\ (x(0), x'(0)) = (0, 1) \end{cases}$$

Cherchons une solution développable en série entière de (C). Soit $x(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ pour $t \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$ avec R supposé > 0. Il vient après changement d'indice et linéarité

$$(\mathrm{C}) \iff \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n\right] t^n = 0 \\ (a_0, a_1) = (0, 1) \end{cases}$$

Par unicité du développement en série entière, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} a_n$$

Une récurrence immédiate donne $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par suite

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}}\right] \times a_1 = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

Le rayon de convergence $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n+1}$ est $\mathrm{R} = +\infty$ d'où l'existence d'une solution développable en série entière à (C). Enfin, par unicité du théorème de Cauchy linéaire, on conclut que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \sin(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n+1}$$

4 Utilisation du wronskien, méthode de Lagrange

Méthode : Résolution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2

$$x'' = a(t)x' + b(t)x \tag{H}$$

avec a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ connaissant une solution φ de (H) qui ne s'annule pas sur I. On procède ainsi :

1. On détermine une expression du wronskien comme solution de l'équation $\mathrm{W}' = a(t)\mathrm{W}$;
2. On résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$\varphi(t)\psi' - \varphi'(t)\psi = \mathrm{W}(t)$$

d'inconnue ψ par variation de la constante ; on connaît déjà φ solution de l'équation homogène donc il suffit de chercher ψ de la forme $\psi = \lambda\varphi$ avec λ dérivable.

Exemple : On reprend l'équation différentielle

$$tx'' + 2x' - tx = 0 \tag{H}$$

Sur $\mathrm{I} =]\,0\,; +\infty\,[$ ou $]-\infty\,; 0\,[$, l'ensemble des solutions est un plan vectoriel. Soit $\varphi : t \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}\,(t)}{t}$ et ψ une solution de (H). Notant W leur wronskien, il vérifie $\mathrm{W}' = -\dfrac{2}{t}\mathrm{W}$ d'où $\mathrm{W}(t) = -\dfrac{\beta}{t^2}$ pour $t \in \mathrm{I}$ avec β réel. Ainsi

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t) = -\frac{\beta}{t^2}$$

La fonction φ est solution de (H) et posant $\psi = \lambda\varphi$ avec $\lambda : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable, il vient $\lambda'(t) = -\dfrac{\beta}{\mathrm{sh}\,(t)^2}$ pour $t \in \mathrm{I}$ puis

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \lambda(t) = \alpha + \beta\frac{\mathrm{ch}\,(t)}{\mathrm{sh}\,(t)}$$

Ainsi
$$\mathrm{S_H} = \left\{t \mapsto \frac{\alpha\,\mathrm{sh}\,(t) + \beta\,\mathrm{ch}\,(t)}{t}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Théorème 9 (Méthode de Lagrange). *Soient a, b, c, d dans $\in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ avec $a(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathrm{I}$ et soit l'équation différentielle linéaire d'ordre 2*

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t) \tag{L}$$

Si φ est une solution de l'équation homogène associée (H) telle que $\varphi(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathrm{I}$, alors posant $x = \varphi\, y$ avec $y \in \mathscr{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, il existe une équation différentielle linéaire d'ordre 1 notée (L′) telle que

$$y' \in \mathrm{S_{L'}} \iff x \in \mathrm{S_L}$$

Démonstration. On a
$$x = \varphi y, \quad x' = \varphi' y + \varphi y', \quad x'' = \varphi'' y + 2\varphi' y' + \varphi y''$$

D'où
$$x \in \mathrm{S_L} \iff y\,[a\varphi'' + b\varphi' + c\varphi] + y'\,[2a\varphi' + b\varphi] + y'' a\varphi = d$$

Autrement dit, $z = y'$ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$a\varphi z' + [2a\varphi' + b\varphi]\, z = d$$

□

Exemple : Sur l'équation différentielle

$$tx'' + 2x' - tx = 0 \tag{H}$$

avec $\mathrm{I} =]\,0\,;+\infty\,[$ ou $]\,-\infty\,;0\,[$, on reprend $\varphi(t) = \dfrac{\operatorname{sh}(t)}{t}$ pour $t \in \mathrm{I}$, on applique la méthode de Lagrange et on retrouve le plan vectoriel précédemment décrit.

Remarques : (1) Pour chacune de ces méthodes, on trouve souvent une deuxième solution qui « ressemble » à la première.
(2) On peut démontrer que ces méthodes fonctionnent et qu'on obtient à l'issue de chacune un plan vectoriel de solution pour l'équation homogène.

Commentaires : La technique du wronskien est très efficace pour la résolution d'une équation linéaire homogène d'ordre 2 : on connaît l'équation dont le wronskien est solution et l'équation

$$\varphi(t)\psi' - \varphi'(t)\psi = \mathrm{W}(t)$$

d'inconnue ψ admet évidemment φ comme solution de l'équation homogène associée ce qui rend la résolution très rapide. S'il y a un second membre à l'équation de départ, on peut alors finaliser la résolution avec une méthode de variation des constantes. Dans le cas d'une équation homogène, la méthode avec wronskien est plus performante que la méthode de Lagrange ; dans le cas d'une équation avec second membre, les deux approches se valent sensiblement.

5 Changement de variables

Soient a, b, c, d dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ avec $a(t) \neq 0$ pour $t \in \mathrm{I}$ et soit l'équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t) \tag{L}$$

Dans certains cas, il est suggéré d'utiliser un changement de variables $t = \psi(u)$ avec ψ un $\mathscr{C}^2$-difféomorphisme d'un intervalle J sur I, *i.e.* une bijection de classe $\mathscr{C}^2$ dont la réciproque est également de classe $\mathscr{C}^2$.

Méthode : On pose $y(u) = x(\psi(u))$ et on détermine les dérivées premières et secondes de y en fonction de celles de x :

$$\begin{cases} y'(u) = & \psi'(u)\,x'(\psi(u)) \\ y''(u) = & \psi''(u)x'(\psi(u)) + \psi'(u)^2 x''(\psi(u)) \end{cases}$$

Puis, en écrivant l'équation (L) avec la variable u

$$a(\psi(u))x''(\psi(u)) + b(\psi(u))x'(\psi(u)) + c(\psi(u))x(\psi(u)) = d(\psi(u))$$

on en déduit une nouvelle équation différentielle pour y, plus simple que (L) en principe.

Exemple : Résoudre sur $]-1\,;1\,[$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$(1 - t^2)x'' - tx' + n^2 x = 0 \tag{L}$$

avec $n \in \mathbb{N}$ à l'aide du changement de variable $t = \cos(u)$. On pose $y(u) = x(\cos(u))$. Par dérivation, il vient

$$\begin{cases} y'(u) = & -\sin(u)x'(\cos(u)) \\ y''(u) = & (1 - \cos(u)^2)x''(\cos(u)) - \cos(u)\,x'(\cos(u)) \end{cases}$$

On obtient $\quad x \in \mathrm{S_L} \iff y'' + ny = 0$

puis $\quad \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall t \in \left]-1\,;1\right[\quad x(t) = \lambda\cos(n\,\mathrm{Arccos}\,(t)) + \mu\sin(n\,\mathrm{Arccos}\,(t))$

IV Équations différentielles linéaires vectorielles

Dans ce qui suit, l'ensemble E désigne un $\mathbb{K}$-ev normé de dimension finie égale à n. Pour $x \in \mathrm{E}$, on note le morphisme d'évaluation $\mathscr{L}(\mathrm{E}) \to \mathrm{E}, f \mapsto f \cdot x$ afin d'éviter une surabondance de parenthèses.

1 Définitions

Définition 8. *Une* équation différentielle linéaire vectorielle *d'ordre* 1 *sur* I *est une équation de la forme*

$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \tag{L}$$

avec a une application continue de I *dans* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et b une application continue de* I *dans* E. *Une* solution *de* (L) *est une application $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ dérivable telle que*

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad f'(t) = a(t) \cdot f(t) + b(t)$$

Remarque : Soit $\mathscr{B}$ base de E. Posant $\mathrm{A}(t) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} a(t) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{B}(t) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} b(t) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{X}(t) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} x(t) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $t \in \mathrm{I}$, l'écriture matricielle fournit le système différentiel linéaire

$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \iff \mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t)$$

Vocabulaire : L'équation
$$x' = a(t) \cdot x \tag{H}$$
est appelée *équation homogène* associée à l'équation (L). Le terme b est appelé *second membre.*

Notations : On note $\mathrm{S_L}$ l'ensemble des solutions de (L) et $\mathrm{S_H}$ l'ensemble des solutions de (H).

Proposition 7. *Soit $a \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathscr{L}(\mathrm{E}))$, $b \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathrm{E})$ et l'équation différentielle linéaire vectorielle*

$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \tag{L}$$

Toute solution de (L) *ou de* (H) *est dans* $\mathscr{C}^1(\mathrm{I},\mathrm{E})$.

Démonstration. Soit $(\varepsilon_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une base de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $a = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\varepsilon_{i,j}$ avec les $a_{i,j}$ dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{K})$ (fonctions coordonnées de a). Si $x \in \mathrm{S_L}$, on a $x' = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\varepsilon_{i,j} \circ x + b \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathrm{E})$. Les $\varepsilon_{i,j}$ sont continues (applications linéaires en dimension finie) et par opération sur des fonctions continues, il s'ensuit que $x \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I},\mathrm{E})$. Le cas de $\mathrm{S_H}$ s'obtient avec $b = 0$. □

2 Problème de Cauchy

Définition 9. *Soit $a \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathscr{L}(\mathrm{E}))$, $b \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathrm{E})$ et $(t_0,x_0) \in \mathrm{I}\times\mathrm{E}$. Le système*

$$\begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) & \text{(L)} \\ x(t_0) = x_0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

est dit problème de Cauchy. *L'équation* (CI) *est la* condition initiale *du problème de Cauchy.*

Remarque : Ce problème de Cauchy peut s'écrire sous forme intégrale :

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [a(s)\cdot x(s) + b(s)]\ \mathrm{d}s$$

Théorème 10 (Théorème de Cauchy linéaire). *Soit* $a \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathscr{L}(\mathrm{E}))$*,* $b \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ *et* $(t_0, x_0) \in \mathrm{I}\times\mathrm{E}$*. Il existe une unique solution au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = a(t)\cdot x + b(t) & \text{(L)} \\ x(t_0) = x_0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

[Admis]

3 Forme des solutions

Théorème 11. *Soit* $a \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathscr{L}(\mathrm{E}))$*,* $b \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ *et l'équation différentielle linéaire vectorielle*

$$x' = a(t)\cdot x + b(t) \tag{L}$$

L'ensemble $\mathrm{S_H}$ *est un sev de* $\mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ *de dimension* n *et l'ensemble* $\mathrm{S_L}$ *est un sous-espace affine de* $\mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ *de direction* $\mathrm{S_H}$*.*

Démonstration. Soit $\mathrm{F} = \mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathrm{E})$, $\mathrm{G} = \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ et $\Phi : \mathrm{F} \to \mathrm{G}, x \mapsto x' - a(\cdot)\cdot x$. On a $\Phi \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$, $\mathrm{S_H} = \mathrm{Ker}\ \Phi$. D'après le théorème de Cauchy linéaire, quitte à choisir des conditions initiales, l'équation (L) admet une solution donc $\mathrm{S_L}$ est non vide d'où $\mathrm{S_L} = x_\mathrm{P} + \mathrm{Ker}\ \Phi$ avec $x_\mathrm{P} \in \mathrm{S_L}$, sous-espace affine de $\mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathrm{E})$.

Soit $t_0 \in \mathrm{I}$ et $\Phi_0 : \mathrm{S_H} \to \mathrm{E}, x \mapsto x(t_0)$. On a clairement $\Phi_0 \in \mathscr{L}(\mathrm{S_H}, \mathrm{E})$ et d'après le théorème de Cauchy linéaire, l'application Φ_0 est un isomorphisme d'où $\dim \mathrm{S_H} = \dim \mathrm{E} = n$. □

Proposition 8 (Principe de superposition). *Soient* φ_1, φ_2 *des solutions respectives de*

$$x' = a(t)\cdot x + b_1(t) \tag{L$_1$}$$

$$x' = a(t)\cdot x + b_2(t) \tag{L$_2$}$$

avec $a \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathscr{L}(\mathrm{E}))$*,* $b_1, b_2 \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathrm{E})$*. Alors pour* $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$*, l'application* $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$ *est solution de*

$$x' = a(t)\cdot x + \alpha_1 b_1(t) + \alpha_2 b_2(t)$$

Démonstration. Immédiate. □

4 Variation des constantes

Définition 10. *Soit* $a \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathscr{L}(\mathrm{E}))$ *et l'équation différentielle linéaire vectorielle homogène*

$$x' = a(t)\cdot x \tag{H}$$

On appelle système fondamental de solutions *de* (H) *une base* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *de* $\mathrm{S_H}$*.*

Théorème 12. *Soit $a \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathscr{L}(\mathrm{E}))$ et l'équation différentielle linéaire vectorielle homogène*

$$x' = a(t) \cdot x \tag{H}$$

Soit $\mathscr{B}$ une base de E *et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des solutions de* (H)*, on définit*

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{W}(t) = \det_{\mathscr{B}}(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

Alors, on a

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \text{ système fondamental de solutions de (H)} \iff \mathrm{W} \text{ ne s'annule pas sur I}$$

Démonstration. Soit $t_0 \in \mathrm{I}$. L'application $\mathrm{S}_{\mathrm{H}}^n \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \mapsto \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0))$ est un isomorphisme d'après le théorème de Cauchy linéaire. Le résultat suit. □

Remarque : Il s'agit évidemment d'une extension de la notion de wronskien vue pour les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2. Bizarrement, cette extension ne figure pas au programme.

Théorème 13. *Soit $a \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathscr{L}(\mathrm{E}))$, $b \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ et l'équation différentielle linéaire vectorielle*

$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \tag{L}$$

Étant donné $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée (H)*, une solution de* (L) *est fournie par $t \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\varphi_i(t)$ avec les $\lambda_i : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ dérivables et vérifiant*

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t)\varphi_i(t) = b(t)$$

Démonstration. On pose $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\varphi_i$. On a

$$x' = a(\cdot) \cdot x + b \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'\varphi_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a(\cdot) \cdot \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a(\cdot) \cdot \varphi_i + b \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'\varphi_i = b$$

Et le système admet une unique solution car, pour $\mathscr{B}$ base de E, la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ avec $t \in \mathrm{I}$ est inversible. □

Remarque : C'est une généralisation du procédé vu pour les équations d'ordre 1 et 2. Considérant

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \tag{L}$$

équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2, on pose pour $t \in \mathrm{I}$

$$\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t) \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} \quad \mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

L'écriture matricielle de la méthode de variation des constantes donne :

$$\lambda'(t) \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} + \mu'(t) \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \psi'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

avec (φ, ψ) un système fondamental de solutions de (H) équation homogène associée à (L). On retrouve les conditions sur λ' et ψ' obtenues dans le théorème 8.

V Exponentielle d'une matrice, d'un endomorphisme

Dans ce qui suit, l'ensemble E est un $\mathbb{K}$-ev normé de dimension finie.

1 Définitions

Proposition 9. *Pour* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, *la série* $\sum \dfrac{\mathrm{A}^n}{n!}$ *converge absolument.*

Démonstration. On munit $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative, par exemple la norme subordonnée à une norme sur $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ avec $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{op}} = \operatorname*{Sup}_{\|\mathrm{X}\|=1} \|\mathrm{AX}\|$. La série exponentielle $\sum \dfrac{\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{op}}^n}{n!}$ converge d'où la convergence absolue. □

Définition 11. *On appelle* exponentielle de la matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *notée* $\exp(\mathrm{A})$ *ou* e^{A} *la somme*

$$\exp(\mathrm{A}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^n}{n!}$$

On munit $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ de la norme subordonnée définie pour $a \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ par $\|a\|_{\mathrm{op}} = \operatorname*{Sup}_{\|x\|=1} \|a \cdot x\|$.

Définition 12. *On appelle* exponentielle de l'endomorphisme $a \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *notée* $\exp(a)$ *ou* e^a *la somme*

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$$

Remarques : (1) Le choix d'une norme sous-multiplicative sur $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ garantit la convergence absolue de $\sum \dfrac{a^n}{n!}$.
(2) Notant $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} a$ avec $\mathscr{B}$ base de E, on a clairement $\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} \mathrm{e}^a$ (continuité de l'isomorphisme $u \mapsto \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$).

2 Propriétés

Proposition 10 (À refaire). *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. *Les matrices* A *et* e^{A} *commutent et* $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\right)^\top = \mathrm{e}^{\mathrm{A}^\top}$.

Démonstration. Conséquence de la continuité du produit matriciel et de la transposition. □

Proposition 11. *Soient* A, B *dans* $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ *telles que* $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$. *On a*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{P}\mathrm{e}^{\mathrm{B}}\mathrm{P}^{-1}$$

Démonstration. Conséquence de la continuité du produit matriciel. □

Les résultats qui suivent sont énoncés vectoriellement mais existent à l'identique matriciellement.

Théorème 14. *Soit* $(u, v) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})^2$ *avec* $u \circ v = v \circ u$. *Alors, on a*

$$\exp(u + v) = \exp(u) \circ \exp(v)$$

Démonstration. On pose pour n entier

$$\Delta_n = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{u^i}{i!}\right) \circ \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{v^j}{j!}\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(u+v)^k}{k!}$$

Comme u et v commutent, on a

$$\forall k \in [\![\, 0\,;\, n \,]\!] \qquad \frac{(u+v)^k}{k!} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^i \circ v^{k-i} = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant k, i+j=k} \frac{u^i \circ v^j}{i!j!}$$

puis $$\Delta_n = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{u^i \circ v^j}{i!j!} - \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n, i+j \leqslant n} \frac{u^i \circ v^j}{i!j!} = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n, n+1 \leqslant i+j \leqslant 2n} \frac{u^i \circ v^j}{i!j!}$$

Ainsi

$$\|\Delta_n\|_{\text{op}} \leqslant \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n, n+1 \leqslant i+j \leqslant 2n} \frac{\|u\|_{\text{op}}^i \|v\|_{\text{op}}^j}{i!j!} = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\|u\|_{\text{op}}^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\|v\|_{\text{op}}^j}{j!}\right) - \sum_{i+j \leqslant n} \frac{\|u\|_{\text{op}}^i \|v\|_{\text{op}}^j}{i!j!}$$

et le majorant tend vers zéro pour $n \to +\infty$. Le résultat suit par encadrement et continuité de la composition $\mathscr{L}(\mathrm{E})^2 \to \mathscr{L}(\mathrm{E}), (a,b) \mapsto a \circ b$, bilinéaire en dimension finie. □

Remarques : (1) Matriciellement, pour $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})^2$ tel que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$, on a $\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \exp(\mathrm{A})\exp(\mathrm{B})$.

(2) Si $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$, on n'a plus la propriété annoncée précédemment. Soit θ réel, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{A}^2 = \mathrm{B}^2 = 0$ puis $\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On observe $\mathrm{A}+\mathrm{B} = \theta\mathrm{R}(\pi/2)$ et par suite

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (\mathrm{A}+\mathrm{B})^n = \theta^n \mathrm{R}(n\pi/2)$$

d'où

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} c(\theta) & -s(\theta) \\ s(\theta) & c(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\theta^n}{n!} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad s(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\theta^n}{n!} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Avec des considérations trigonométriques, on remarque $c(\theta) = \cos(\theta)$, $s(\theta) = \sin(\theta)$ d'où

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\mathrm{e}^{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1-\theta^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}} = \mathrm{R}(\theta)$$

Pour $\theta \neq 0$, les matrices A et B ne commutent pas et on a $\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\mathrm{e}^{\mathrm{B}} \neq \mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$.

Corollaire 3. *Pour $a \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on a $\exp(a) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ et $\exp(a)^{-1} = \exp(-a)$.*

Démonstration. Immédiate. □

Théorème 15. *L'application* exp *est continue sur $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.*

Démonstration. Pour n entier, on pose $u_n(a) = \dfrac{a^n}{n!}$ pour $a \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Les fonctions u_n sont continues car la composition, linéaire dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ de dimension finie, est continue. Soit $\mathrm{R} \geqslant 0$. Pour $\|a\|_{\text{op}} \leqslant \mathrm{R}$, on a

$$\|u_n(a)\|_{\text{op}} \leqslant \frac{\|a\|_{\text{op}}^n}{n!} \leqslant \frac{\mathrm{R}^n}{n!}$$

d'où la convergence normales sur $\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})$. Ainsi, la série de fonctions continues $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})$ et ce pour tout $\mathrm{R} \geqslant 0$ d'où la continuité de exp. □

Théorème 16. *Soit $a \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. L'application $t \mapsto \mathrm{e}^{ta}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{ta}\right] = a \circ \mathrm{e}^{ta} = \mathrm{e}^{ta} \circ a$$

Démonstration. On pose $u_n(t) = \dfrac{t^n a^n}{n!}$ pour n entier et t réel. Les fonctions u_n sont à coordonnées polynomiales et donc de classe $\mathscr{C}^\infty$. La série $\sum u_n$ converge simplement et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n' = \sum u_{n+1}'$ converge normalement sur tout segment $[-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}]$ donc uniformément sur tout segment. On en déduit le caractère $\mathscr{C}^1$ de $t \mapsto \exp(ta)$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{ta}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n a^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(ta)^n}{n!} \circ a\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a \circ \frac{(ta)^n}{n!}\right)$$

Par continuité de la composition, on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ta)^n}{n!}\right) \circ a = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(ta)^n}{n!} \circ a\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a \circ \frac{(ta)^n}{n!}\right) = a \circ \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ta)^n}{n!}\right)$$

Le caractère $\mathscr{C}^\infty$ s'obtient par récurrence. □

Remarque : Matriciellement, pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\right] = \mathrm{A}\mathrm{e}^{t\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{A}$$

3 Calcul d'exponentielles de matrices

Proposition 12. *Pour $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, on a*

$$\exp(\mathrm{D}) = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_p})$$

Démonstration. On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{D}^n}{n!} = \mathrm{diag}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda_1^n}{n!}, \ldots, \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda_p^n}{n!}\right) = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_p})$$

□

Remarque : Si A diagonale, on a donc e^{A} diagonale mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 13. *Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ diagonalisable avec $\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{D}\mathrm{P}^{-1}$ et $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, D diagonale. On a*

$$\exp(\mathrm{A}) = \mathrm{P}\exp(\mathrm{D})\mathrm{P}^{-1}$$

Démonstration. Résulte de la proposition 11. □

Proposition 14. *Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice r. On a*

$$\exp(\mathrm{A}) = \sum_{n=0}^{r-1}\frac{\mathrm{A}^n}{n!}$$

Démonstration. Immédiate. □

Proposition 15. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ *telle que* $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(\lambda_1 \mathrm{I}_{m_1} + \mathrm{T}_1, \ldots, \lambda_r \mathrm{I}_{m_r} + \mathrm{T}_r)$ *avec les* T_i *triangulaires supérieures strictes. On a*

$$\exp(\mathrm{A}) = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}\exp(\mathrm{T}_1), \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_r}\exp(\mathrm{T}_r))\mathrm{P}^{-1}$$

Démonstration. D'après la proposition 11, on a

$$\exp(\mathrm{A}) = \mathrm{P}\exp\mathrm{diag}(\lambda_1 \mathrm{I}_{m_1} + \mathrm{T}_1, \ldots, \lambda_r \mathrm{I}_{m_r} + \mathrm{T}_r)\mathrm{P}^{-1}$$

Puis, un calcul par bloc donne

$$\exp\mathrm{diag}(\lambda_1 \mathrm{I}_{m_1} + \mathrm{T}_1, \ldots, \lambda_r \mathrm{I}_{m_r} + \mathrm{T}_r) = \mathrm{diag}(\exp(\lambda_1 \mathrm{I}_{m_1} + \mathrm{T}_1), \ldots, \exp(\lambda_r \mathrm{I}_{m_r} + \mathrm{T}_r))$$

Enfin, comme $\lambda_i \mathrm{I}_{m_i}$ matrice d'homothétie commute avec T_i, on trouve

$$\forall i \in [\![1 \,;\, r]\!] \qquad \mathrm{e}^{\lambda_i \mathrm{I}_{m_i} + \mathrm{T}_i} = \mathrm{e}^{\lambda_i \mathrm{I}_{m_i}}\mathrm{e}^{\mathrm{T}_i} = \mathrm{e}^{\lambda_i}\mathrm{e}^{\mathrm{T}_i}$$

Le résultat suit. □

Proposition 16. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ *telle que*

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) + \mathrm{T} \quad \textit{avec} \quad \mathrm{T} \textit{ triangulaire supérieure stricte}$$

Alors $$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\mathrm{P} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_p}) + \mathrm{Q}$$

avec $\mathrm{Q} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *triangulaire supérieure stricte. En particulier, on a*

$$\mathrm{Sp}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\right) = \exp\left(\mathrm{Sp}\left(\mathrm{A}\right)\right)$$

Démonstration. On a pour n entier

$$\mathrm{P}^{-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{A}^k}{k!}\mathrm{P} = \mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_p^k}{k!}\right) + \mathrm{T}_n$$

avec la suite $(\mathrm{T}_n)_n$ suite convergente (différence de deux suites convergentes avec la continuité du produit matriciel pour le premier terme) dans l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes qui est fermé en tant que sev de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. Faisant tendre $n \to +\infty$, on a le résultat annoncé. □

Méthode : Calcul de $\exp(\mathrm{A})$ avec $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme annulateur de A. On note $q = \deg \mathrm{P}$. D'après le théorème de la division euclidienne, pour n entier, il existe Q_n et R_n dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{X}^n = \mathrm{PQ}_n + \mathrm{R}_n$ avec $\deg \mathrm{R}_n < q$. Notant $\mathrm{R}_n = \sum\limits_{k=0}^{q-1}\alpha_{k,n}\mathrm{X}^k$, on trouve $\mathrm{A}^n = \mathrm{R}_n(\mathrm{A}) = \sum\limits_{k=0}^{q-1}\alpha_{k,n}\mathrm{A}^k$ et après permutation des sommes à justifier, on trouve

$$\exp(\mathrm{A}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{R}_n(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{A}^k\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha_{k,n}}{n!}$$

VI Système différentiel linéaire à coefficients constants

Dans ce qui suit, k'ensemble E désigne un $\mathbb{K}$-ev normé de dimension finie égale à n. Pour $x \in \mathrm{E}$, on note le morphisme d'évaluation $\mathscr{L}(\mathrm{E}) \to \mathrm{E}$, $f \mapsto f \cdot x$.

1 Définitions, résultats théoriques

Définition 13. *Une* équation différentielle linéaire vectorielle d'ordre 1 à coefficients constants sur I *est une équation de la forme*

$$x' = a \cdot x + b(t) \qquad \text{(L)}$$

avec $a \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et* $b \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathrm{E})$.

Remarque : L'écriture matricielle fournit le système différentiel linéaire

$$x' = a \cdot x + b(t) \iff \mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}(t)$$

avec $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ (et les conventions vues dans la remarque faisant suite à la définition 8).

Théorème 17. *Soit* $a \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E}$. *Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = a \cdot x & \text{(H)} \\ x(t_0) = x_0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

admet pour unique solution $x : t \mapsto \mathrm{e}^{(t-t_0)a} \cdot x_0$.

Démonstration. Le morphisme d'évaluation $\mathscr{L}(\mathrm{E}) \to \mathrm{E}, f \mapsto f \cdot y_0$ avec $y_0 = \mathrm{e}^{-t_0 a} \cdot x_0$ est continu (linéaire en dimension finie). Par ailleurs, on a par commutation

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{(t-t_0)a} = \mathrm{e}^{ta} \circ \mathrm{e}^{-t_0 a}$$

Ainsi, pour t, h réels avec $h \neq 0$, il vient par continuité du morphisme d'évaluation

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{\mathrm{e}^{(t+h)a} - \mathrm{e}^{ta}}{h} \cdot y_0 \xrightarrow[h \to 0]{} a \circ \mathrm{e}^{ta} \cdot y_0 = a \cdot x(t)$$

autrement dit $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad x'(t) = a \cdot x(t)$

Le résultat suit sachant que l'unicité est fournie par le théorème de Cauchy linéaire.

Variante. On peut établir l'unicité sans recours au théorème de Cauchy linéaire. Pour $x \in \mathrm{S_H}$, on trouve par bilinéarité de $\mathscr{L}(\mathrm{E}) \times \mathrm{E} \to \mathrm{E}, (f, y) \mapsto f \cdot y$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-(t-t_0)a} \cdot x(t)\right] = -\mathrm{e}^{-(t-t_0)a} \circ a \cdot x(t) + \mathrm{e}^{-(t-t_0)a} \cdot x'(t) = 0$$

d'où $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{-(t-t_0)a} \cdot x(t) = \mathrm{e}^{-(t_0-t_0)a} \cdot x(t_0) = \mathrm{id} \cdot x_0 = x_0$

d'où l'unicité annoncée. □

Remarque : Matriciellement, la solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ avec $\mathrm{X}(t_0) = \mathrm{X}_0$ s'écrit

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) = \exp((t - t_0)\mathrm{A})\mathrm{X}_0$$

Théorème 18. *Soit* $a \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, $b \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ *et* $(t_0, x_0) \in \mathrm{I} \times \mathrm{E}$. *Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = a \cdot x + b(t) & \text{(L)} \\ x(t_0) = x_0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

admet pour unique solution

$$t \mapsto \mathrm{e}^{(t-t_0)a} \cdot \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-(s-t_0)a} \cdot b(s)\, \mathrm{d}s\right)$$

Démonstration. On applique la méthode de variation des constantes. Pour $\lambda : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ dérivable, on pose $x(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)a} \cdot \lambda(t)$ avec $\lambda(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) e_i$ où $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ base de E et $t \in \mathrm{I}$. Le résultat suit. La démarche est licite car $\left(t \mapsto \mathrm{e}^{(t-t_0)a} \cdot e_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système fondamental de solutions :

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{e}^{(t-t_0)a} \cdot e_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$$

le sens direct s'obtenant simplement en évaluant en t_0. Ceci prouve la liberté de la famille des solutions et cette famille est de cardinal égal à $\dim \mathrm{S_H}$ ce qui prouve qu'il s'agit d'une base de $\mathrm{S_H}$. □

Remarque : Matriciellement, la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}(t) \\ \mathrm{X}(t_0) = \mathrm{X}_0 \end{cases}$$

avec $\mathrm{B} \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ et $(t_0, \mathrm{X}_0) \in \mathrm{I} \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ s'écrit

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{X}(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)\mathrm{A}} \left(\mathrm{X}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-(s-t_0)\mathrm{A}} \mathrm{B}(s)\, \mathrm{d}s \right)$$

2 Résolution pratique

Théorème 19. *Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Toute solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ est de la forme*

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{e}^{\lambda_i t} \mathrm{V}_i$$

avec les λ_i valeurs propres de A, les V_i des vecteurs propres associés et les α_i des scalaires.

Démonstration. Pour $\mathrm{X} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, on pose $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$ avec $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ diagonale. On note $(\mathrm{E}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \iff \mathrm{Y}' = \mathrm{DY} \iff \mathrm{Y} \in \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t} \mathrm{E}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$$

En observant $\mathrm{P} = \left(\mathrm{V}_1 | \ldots | \mathrm{V}_n\right)$, on conclut

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t} \mathrm{PE}_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t} \mathrm{V}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$$

□

Remarques : (1) Si $\mathrm{Re}\,(\lambda_i) \leqslant 0$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, les solutions sont bornées sur $\mathbb{R}_+$. Si $\mathrm{Re}\,(\lambda_i) < 0$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, les solutions ont une limite nulle en $+\infty$.
(2) On lit le système fondamental de solutions dans l'expression de $\mathrm{X}(t)$ pour t réel. La liberté peut se déduire de la structure de $\mathrm{S_H}$ ou plus simplement en évaluant en $t = 0$.

Exemples : 1. On considère le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

On trouve $$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) = \alpha \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

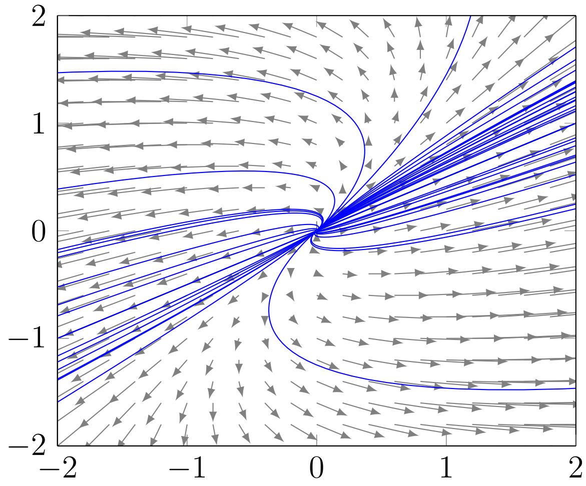

Figure 3 – Tracé de courbes solutions de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$

2. On considère le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

La matrice associée est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$. On commence par réduire dans $\mathbb{C}$. On trouve

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) = \alpha \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} + \beta \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Notant $\Phi(t) = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ pour t réel, les fonctions $\mathrm{Re}\, \Phi$ et $\mathrm{Im}\, \Phi$ sont clairement solutions réelles du système initial et on vérifie sans difficulté la liberté de ces fonctions.

Remarque : Notant $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient d'abord $\mathrm{AX}_1 = (1+\mathrm{i})\mathrm{X}_1$ avec $\mathrm{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ puis on conjugue la relation précédente pour en déduire la valeur propre conjuguée et un vecteur propre associé.

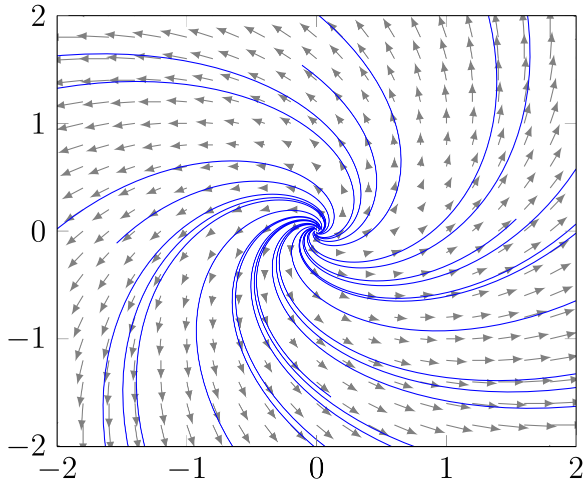

Figure 4 – Tracé de courbes solutions de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$

Méthode : Résolution de $X' = AX + B(t)$ avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $B \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$ diagonale. On peut :
- résoudre le système homogène puis appliquer la méthode de variation des constantes ;
- poser $X = PY$ puis résoudre $Y' = DY + P^{-1}B(t)$, système d'équations linéaires scalaires d'ordre 1 avec second membre ;
- résoudre le système homogène et chercher une solution particulière (si le contexte s'y prête).

Exemple : On considère ensuite le système différentiel linéaire avec second membre

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y + t \end{cases}$$

On peut procéder par variation des constantes :

$$\lambda'(t)\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \mu'(t)\begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda'(t) = 2te^{-2t} \\ \mu'(t) = -te^{-3t} \end{cases} \iff \textit{etc.}$$

ou chercher directement une solution particulière, par exemple, $x_P(t) = a + bt$ et $y_P(t) = c + dt$ qui fournit ici un système de Cramer à 4 équations, 4 inconnues (pas palpitant). On peut encore résoudre

$$Y' = DY + P^{-1}B(t) \iff \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u \\ 3v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \iff \begin{cases} u' = 2u + 2t \\ v' = 3v - t \end{cases}$$

On revient à la formulation en X avec $X = PY$.

Méthode : Résolution de $X' = AX$ avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ trigonalisable. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $T = P^{-1}AP = \big(t_{i,j}\big)$ triangulaire supérieure. On note $X = PY$ avec $Y(t) = \big(y_i(t)\big)$ pour t réel. On a

$$X' = AX \iff Y' = TY \iff \begin{cases} y_1' & = t_{1,1}y_1 + \dots t_{1,n}y_n \\ \vdots & \vdots \\ y_n' & = t_{n,n}y_n \end{cases}$$

On résout la dernière équation puis on substitue l'expression de y_n dans les autres équations, on résout l'avant-dernière, etc. ... On conclut avec $X = PY$.

Exemple : On considère le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

On a $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A = (X-2)^2$. On écrit $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on choisit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 01 \end{pmatrix}$ pour trigonaliser. On a donc

$$X' = AX \iff Y' = TY \iff \begin{cases} u' = 2u + v \\ v' = 2v \end{cases}$$

$$\iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} u(t) = (\alpha + \beta t)e^{2t} \\ v(t) = \beta e^{2t} \end{cases}$$

Ainsi $$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \quad | \quad \mathrm{X}(t)=\alpha e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\beta e^{2t}\begin{pmatrix}t+1\\t\end{pmatrix}$$

Méthode : Résolution de $\mathrm{X}'=\mathrm{AX}+\mathrm{B}(t)$ avec $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ trigonalisable et $\mathrm{B}\in\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$. On applique les méthodes vues dans le cas diagonalisable.

VII Équation scalaire linéaire d'ordre n

Dans ce qui suit, n désigne un entier non nul.

1 Définitions

Définition 14. *Une* équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n *est une équation de la forme*

$$x^{(n)}=a_{n-1}(t)x^{(n-1)}+\ldots+a_0(t)x+b(t) \qquad \text{(L)}$$

avec a_0, …, a_{n-1}, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{K})$. Une solution *de* (L) *est une application $f:\mathrm{I}\to\mathbb{K}$ n fois dérivable telle que*

$$\forall t\in\mathrm{I} \qquad f^{(n)}(t)=a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0(t)f(t)+b(t)$$

Vocabulaire : L'équation $$x^{(n)}=a_{n-1}(t)x^{(n-1)}+\ldots+a_0(t)x \qquad \text{(H)}$$
est appelée *équation homogène* associée à l'équation (L). Le terme b est appelé *second membre.*

Notations : On note $\mathrm{S_L}$ l'ensemble des solutions de (L) et $\mathrm{S_H}$ l'ensemble des solutions de (H).

Proposition 17. *Soient a_0, …, a_{n-1}, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et $x:\mathrm{I}\to\mathbb{K}$ n fois dérivable. Pour $t\in\mathrm{I}$, on note $\mathrm{X}(t)^\top=\begin{pmatrix}x(t) & \ldots & x^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}$. On a*

$$x\in\mathrm{S_L}\iff \mathrm{X}'=\mathrm{A}(t)\mathrm{X}+\mathrm{B}(t) \quad \textit{et} \quad x\in\mathrm{S_H}\iff\mathrm{X}'=\mathrm{A}(t)\mathrm{X}$$

$$\textit{avec} \qquad \forall t\in\mathrm{I} \qquad \mathrm{A}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1\\ a_0(t) & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n-1}(t)\end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \mathrm{B}(t)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ b(t)\end{pmatrix}$$

Démonstration. Immédiate. □

Proposition 18. *Soient a_0, …, a_{n-1}, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et l'équation différentielle linéaire d'ordre n*

$$x^{(n)}=a_{n-1}(t)x^{(n-1)}+\ldots+a_0(t)x+b(t) \qquad \text{(L)}$$

Toute solution de (L) *ou de* (H) *est dans $\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{K})$.*

Démonstration. On applique la proposition 7 à la formulation matricielle d'ordre 1 de l'équation différentielle d'ordre n et on spécialise le résultat pour la dernière coordonnée. □

2 Problème de Cauchy

Définition 15. *Soient* a_0, …, a_{n-1}, b *dans* $\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{K})$ *et* $(t_0, x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathrm{I}\times\mathbb{K}^n$. *Le système*

$$\begin{cases} x^{(n)} = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)x + b(t) & \text{(L)} \\ \forall k \in [\![\, 0\,;\, n-1 \,]\!] \qquad x^{(k)}(t_0) = x_k & \text{(CI)} \end{cases}$$

est dit problème de Cauchy. *Les équations* (CI) *constituent les* conditions initiales *du problème de Cauchy.*

Théorème 20 (Cauchy linéaire). *Soient* a_0, …, a_{n-1}, b *dans* $\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{K})$ *et* $(t_0, x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathrm{I}\times\mathbb{K}^n$. *Il existe une unique solution au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x^{(n)} = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)x + b(t) & \text{(L)} \\ \forall k \in [\![\, 0\,;\, n-1 \,]\!] \qquad x^{(k)}(t_0) = x_k & \text{(CI)} \end{cases}$$

admet une unique solution.

Démonstration. On applique le théorème de Cauchy linéaire à la formulation matricielle d'ordre 1 de l'équation différentielle d'ordre n et on spécialise le résultat pour la première coordonnée. □

3 Forme des solutions

Théorème 21. *Soient* a_0, …, a_{n-1}, b *dans* $\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{K})$ *et l'équation différentielle linéaire d'ordre* n

$$x^{(n)} = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)x + b(t) \tag{L}$$

L'ensemble $\mathrm{S_H}$ *est un sev de* $\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{K})$ *de dimension* n *et l'ensemble* $\mathrm{S_L}$ *est un sous-espace affine de* $\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{K})$ *de direction* $\mathrm{S_H}$.

Démonstration. On applique le théorème 11 à la formulation matricielle d'ordre 1 de l'équation différentielle d'ordre n et on spécialise le résultat pour la première coordonnée :

$$x \in \mathrm{S_H} \iff \mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}\,(\Phi_1, \ldots, \Phi_n) \iff x \in \mathrm{Vect}\,(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

avec $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ libre puisque $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ l'est et qu'on a

$$\forall i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!] \qquad {\Phi_i}^\top = \begin{pmatrix} \varphi_i & \varphi_i' & \ldots & \varphi_i^{(n-1))} \end{pmatrix}$$

On procède de même pour le cas affine :

$$x \in \mathrm{S_L} \iff \mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t) \iff \mathrm{X} \in \mathrm{X_P} + \mathrm{Vect}\,(\Phi_1, \ldots, \Phi_n) \iff x \in x_p + \mathrm{S_H}$$

□

Proposition 19 (Principe de superposition). *Soient* φ_1, φ_2 *des solutions respectives de*

$$x^{(n)} = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)x + b_1(t) \tag{L$_1$}$$

$$x^{(n)} = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)x + b_2(t) \tag{L$_2$}$$

avec $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_1, b_2 \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{K})$. *Alors pour* $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$, *l'application* $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$ *est solution de*

$$x^{(n)} = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)x + \alpha_1 b_1(t) + \alpha_2 b_2(t)$$

Démonstration. Immédiate. □

4 Équations à coefficients constants

Définition 16. *Une* équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n à coefficients constants *est une équation de la forme*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x = b(t) \tag{L}$$

avec $a_0, \ldots, a_{n-1}$ *des scalaires et* $b \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.

Théorème 22. *Soit l'équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre n à coefficients constants*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x = 0 \tag{H}$$

avec $a_0, \ldots, a_{n-1}$ *des scalaires. Si la matrice compagne* A *du système différentiel associé à* (H) *est diagonalisable, alors on a*

$$\mathrm{S_H} = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t})_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

avec les λ_i valeurs propres de A.

Démonstration. On applique le théorème 19 à la formulation matricielle d'ordre 1 de l'équation différentielle d'ordre n et on spécialise le résultat pour la première coordonnée :

$$x \in \mathrm{S_H} \iff \mathrm{X}' = \mathrm{AX} \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t}\mathrm{V}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \Longrightarrow x \in \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t})_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

On a donc prouvé $$\mathrm{S_H} \subset \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t})_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

avec $\dim \mathrm{S_H} = n$ et $\mathrm{S_H}$ inclus dans un espace engendré par une famille de cardinal $\leqslant n$. L'égalité s'ensuit. □

Remarque : L'espace $\mathrm{S_H}$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. L'égalité obtenue ci-avant impose donc que les λ_i soient distincts. C'est un fait connu : une matrice compagne d'ordre n est diagonalisable si et seulement si elle admet n valeurs propres distinctes. On peut également en déduire une base de vecteurs propres de A en injectant l'écriture de x dans X puisqu'on a en fait l'équivalence

$$x \in \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t})_{1 \leqslant i \leqslant n} \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t}\mathrm{V}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

Proposition 20. *Soit l'équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre n à coefficients constants*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x = 0 \tag{H}$$

avec $a_0, \ldots, a_{n-1}$ *des scalaires. Les solutions de* (H) *sont de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. On procède par récurrence. □

Théorème 23. *Soit l'équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre n à coefficients constants*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x = 0 \tag{H}$$

avec $a_0, \ldots, a_{n-1}$ *des scalaires. On note* $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$. *Si* P *peut s'écrire sous forme scindé* $\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{r} (\mathrm{X} - \lambda_i)^{m_i}$ *dans* $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *avec les λ_i distincts et les m_i entiers non nuls, alors*

$$\left(t \mapsto t^j \mathrm{e}^{\lambda_i t}, i \in [\![1\,;\, r]\!], j \in [\![0\,;\, m_i - 1]\!]\right)$$

est un système fondamental de solutions de (H).

Démonstration. On pose $\mathrm{E} = \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ et D l'endomorphisme de dérivation de E dans E. D'après le théorème des noyaux, on a

$$\mathrm{S_H} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{P(D)} = \mathrm{Ker}\ \bigcirc_{i=1}^{r}(\mathrm{D} - \lambda_i\,\mathrm{id}\,)^{m_i} = \bigoplus_{i=1}^{r}\mathrm{Ker}\,(\mathrm{D} - \lambda_i\,\mathrm{id}\,)^{m_i}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathrm{E}$. On pose $x = e_\lambda y$ avec $e_\lambda : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. Par dérivation, on trouve

$$(\mathrm{D} - \lambda\,\mathrm{id}\,)(x) = e_\lambda \mathrm{D}(y)$$

et par récurrence immédiate, pour m entier non nul

$$(\mathrm{D} - \lambda\,\mathrm{id}\,)^m(x) = e_\lambda \mathrm{D}^m(y)$$

Ainsi $\qquad x \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{D} - \lambda\,\mathrm{id}\,)^m \iff y \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{D}^m \iff y \in \mathrm{Vect}\ (t \mapsto t^j)_{j\in[\![0\,;\,m-1]\!]}$

On en déduit la famille génératrice annoncée et la liberté vient soit par une vérification directe (caractérisation d'une somme directe puis famille de fonctions polynomiales) ou par un argument de dimension (plus rapide mais requiert le théorème de Cauchy linéaire, argument non trivial). $\square$

Annexes

Théorème de Cauchy linéaire

Théorème 10. *Soit $a \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathscr{L}(\mathrm{E}))$, $b \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ et $(t_0, x_0) \in \mathrm{I} \times \mathrm{E}$. Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Démonstration. Considérons la suite de fonctions $(\varphi_n)_n$ définies par

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \varphi_0(t) = x_0 \quad \text{et} \quad \varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [a(s) \cdot \varphi_n(s) + b(s)]\ \mathrm{d}s$$

Par récurrence immédiate, on établit l'existence et la continuité de φ_n pour tout n entier.

L'espace $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ est muni de la norme subordonnée. Soit K un segment inclus dans I contenant t_0. L'application $t \mapsto \|a(t)\|_{\mathrm{op}}$ est continue sur le segment K donc bornée. Notons $\mathrm{M} = \underset{t \in \mathrm{K}}{\mathrm{Sup}}\ \|a(t)\|_{\mathrm{op}}$ et

$$\mathscr{P}(n) : \quad \forall t \in \mathrm{K} \qquad \|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leqslant \mathrm{M}^n \frac{|t - t_0|^n}{n!} \|\varphi_1 - \varphi_0\|_{\infty,\mathrm{K}}$$

• **Initialisation** $\mathscr{P}(0)$ **:** Immédiat.

• **Hérédité** $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$ **:**

$$\forall t \in \mathrm{K} \qquad \varphi_{n+2}(t) - \varphi_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} a(s) \cdot (\varphi_{n+1}(s) - \varphi_n(s))\ \mathrm{d}s$$

Soit $t \in \mathrm{K}$ tel que $t \geqslant t_0$. On a

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n+2}(t) - \varphi_{n+1}(t)\| &\leqslant \int_{t_0}^{t} \mathrm{M} \times \|\varphi_{n+1}(s) - \varphi_n(s)\|\ \mathrm{d}s \\ &\leqslant \mathrm{M} \int_{t_0}^{t} \mathrm{M}^n \frac{(s - t_0)^n}{n!} \|\varphi_1 - \varphi_0\|_{\infty,\mathrm{K}}\ \mathrm{d}s = \mathrm{M}^{n+1} \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \|\varphi_1 - \varphi_0\|_{\infty,\mathrm{K}} \end{aligned}$$

Pour $t \leqslant t_0$, les intégrales sont changées en $\displaystyle\int_{t}^{t_0}$ et on obtient la même inégalité ce qui clôt la récurrence.

Notant $\alpha = \underset{t \in \mathrm{K}}{\mathrm{Sup}}\ |t - t_0|$, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|\varphi_{n+1} - \varphi_n\|_{\infty,\mathrm{K}} \leqslant \mathrm{M}^n \frac{\alpha^n}{n!} \|\varphi_1 - \varphi_0\|_{\infty,\mathrm{K}}$$

La série $\sum \|\varphi_{n+1} - \varphi_n\|_{\infty,\mathrm{K}}$ converge donc la série $\sum [\varphi_{n+1} - \varphi_n]$ converge normalement sur tout segment de I (puisque tout segment est contenu dans un segment contenant également t_0). Par téléscopage, il s'ensuit que la suite $(\varphi_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction φ continue.

Soit K un segment inclus dans I contenant t_0. On a

$$\underset{s \in \mathrm{K}}{\mathrm{Sup}}\ \|a(s) \cdot (\varphi_n(s) - \varphi(s))\| \leqslant \mathrm{M} \|\varphi_n - \varphi\|_{\infty,\mathrm{K}} = \mathrm{o}(1)$$

Soit $t \in \mathrm{K}$. Par convergence uniforme sous l'intégrale, on peut faire tendre $n \to +\infty$ dans l'égalité

$$\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [a(s) \cdot \varphi_n(s) + b(s)] \, \mathrm{d}s$$

On trouve
$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [a(s) \cdot \varphi(s) + b(s)] \, \mathrm{d}s$$

Le choix de K étant arbitraire, l'égalité a lieu pour tout $t \in \mathrm{I}$. En particulier pour $t = t_0$, on a $\varphi(t_0) = x_0$. D'après le théorème fondamental d'analyse, l'application φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et par dérivation

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \varphi'(t) = a(t) \cdot \varphi(t) + b(t)$$

D'où φ est une solution du problème de Cauchy.

Considérons φ et ψ deux solutions du problème de Cauchy et notons $\delta = \varphi - \psi$. Cette différence vérifie

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \delta(t) = \int_{t_0}^{t} a(s) \cdot \delta(s) \, \mathrm{d}s$$

Soit K un segment inclus dans I contenant t_0 et $\mathrm{C} = \operatorname*{Sup}_{t \in \mathrm{K}} \|\delta(t)\|$. Une récurrence donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall t \in \mathrm{K} \qquad \|\delta(t)\| \leqslant \mathrm{CM}^n \frac{|t - t_0|^n}{n!}$$

Faisant $n \to +\infty$, on en déduit que δ s'annule sur K et le choix de K étant arbitraire, on a l'annulation sur I tout entier ce qui prouve l'unicité.

Variante pour l'unicité. Par inégalité triangulaire, on a

$$\forall t \in \mathrm{I} \cap [\, t_0 \,; +\infty \,[\qquad \|\delta(t)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|a(s)\|_{\mathrm{op}} \|\delta(s)\| \, \mathrm{d}s$$

Le lemme de Gronwall permet de conclure sur l'intervalle $\mathrm{I} \cap [\, t_0 \,; +\infty \,[$. On remarque que choix de $t_0 \in \mathrm{I}$ n'intervient pas et le résultat suit. $\square$

Méthode du wronskien et méthode de Lagrange

Méthode : Résolution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2

$$x'' = a(t)x' + b(t)x \tag{H}$$

avec a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ connaissant une solution φ de (H) qui ne s'annule pas sur I. On procède ainsi :

1. On détermine une expression du wronskien comme solution de l'équation $\mathrm{W}' = a(t)\mathrm{W}$;
2. On résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$\varphi(t)\psi' - \varphi'(t)\psi = \mathrm{W}(t)$$

d'inconnue ψ par variation de la constante ; on connaît déjà φ solution de l'équation homogène donc il suffit de chercher ψ de la forme $\psi = \lambda\varphi$ avec λ dérivable.

Considérons l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2

$$x'' = a(t)x' + b(t)x \tag{H}$$

avec a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. Soit φ solution de (H) qui ne s'annule pas sur I. Si ψ est également solution de (H), on peut considérer le wronskien W associé défini par

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{W}(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = \varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)$$

On sait que W est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$\mathrm{W}' = a(t)\mathrm{W}$$

On en déduit $\mathrm{W} : t \mapsto \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et A une primitive de a. On peut désormais considérer la relation

$$\varphi(t)\psi' - \varphi'(t)\psi = \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}$$

comme une équation différentielle linéaire d'ordre 1 d'inconnue ψ. La fonction φ est solution de l'équation homogène associée. Par variation de la constante, posant $\psi = \lambda\varphi$, on trouve

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \lambda'(t)\varphi(t)^2 = \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}$$

d'où $$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \lambda(t) = \alpha \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}}{\varphi^2(t)}\,\mathrm{d}t + \beta$$

Et on conclut $$\mathrm{S_H} = \left\{ t \mapsto \alpha\varphi(t) \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}}{\varphi^2(t)}\,\mathrm{d}t + \beta\varphi(t), (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

La fonction $t \mapsto \displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}}{\varphi^2(t)}\,\mathrm{d}t$ n'est pas constante et on obtient bien un plan vectoriel de solutions.

Théorème 9 (Méthode de Lagrange). *Soit $a, b, c, d \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ avec $a(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathrm{I}$ et soit l'équation différentielle linéaire d'ordre 2*

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t) \tag{L}$$

Si φ est une solution de l'équation homogène associée (H) telle que $\varphi(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathrm{I}$, alors posant $x = \varphi\, y$ avec $y \in \mathscr{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, il existe une équation différentielle linéaire d'ordre 1 notée (L$'$) telle que

$$y' \in \mathrm{S_{L'}} \iff x \in \mathrm{S_L}$$

À l'issue de la méthode de Lagrange, on est assuré d'avoir toutes les solutions de (L). En effet, notant $u \in \mathrm{S_{L'}}$ et (ψ) base de $\mathrm{S_{H'}}$, on a

$$y' = u + \beta\psi \quad \text{avec} \quad \beta \text{ réel}$$

puis $$y = \mathrm{U} + \alpha + \beta\Psi \quad \text{avec} \quad \mathrm{U} = \int u \quad \text{et} \quad \Psi = \int \psi$$

et par suite $$x = \mathrm{U}\varphi + \alpha\varphi + \beta\varphi\Psi \quad \text{avec} \quad \alpha,\ \beta \text{ réels}$$

La famille $(\varphi, \varphi\Psi)$ est libre car Ψ non constant et on obtient bien un plan affine de solutions.

Méthode : Calcul de $\exp(\mathrm{A})$ avec $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme annulateur de A. On note $q = \deg \mathrm{P}$. D'après le théorème de la division euclidienne, pour n entier, il existe Q_n et R_n dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{X}^n = \mathrm{PQ}_n + \mathrm{R}_n$ avec $\deg \mathrm{R}_n < q$. Notant $\mathrm{R}_n = \sum\limits_{k=0}^{q-1} \alpha_{k,n} \mathrm{X}^k$, on trouve $\mathrm{A}^n = \mathrm{R}_n(\mathrm{A}) = \sum\limits_{k=0}^{q-1} \alpha_{k,n} \mathrm{A}^k$ et après permutation des sommes à justifier, on trouve

$$\exp(\mathrm{A}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{R}_n(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{A}^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,n}}{n!}$$

On va justifier que la permutation des sommes est licite. Quitte à travailler dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, on peut supposer P scindé avec $\mathrm{P} = \prod\limits_{i=1}^{r} (\mathrm{X} - x_i)^{m_i}$, les λ_i deux à deux distincts et les m_i des entiers non nuls.
Soit $i \in [\![1\,;\, r]\!]$. On a x_i racine de P d'ordre m_i. Ainsi, par dérivations successives puis substitution de X par x_i, on obtient

$$\begin{cases} x_i^n & = \sum\limits_{k=0}^{q-1} \alpha_{k,n} x_i^k \\ n x_i^{n-1} & = \sum\limits_{k=1}^{q-1} \alpha_{k,n} k x_i^{k-1} \\ \vdots & \\ \dfrac{n!}{(n-m_i+1)!} x_i^{n-m_i+1} & = \sum\limits_{k=m_i-1}^{q-1} \alpha_{k,n} \dfrac{k!}{(k-m_i+1)!} x_i^{k-m_i+1} \end{cases}$$

que l'on peut écrire matriciellement

$$\begin{pmatrix} x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & \ldots & \ldots & x_1^{q-1} \\ 0 & x_1^0 & 2x_1^1 & \ldots & \ldots & (q-1)x_1^{q-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & (m_1-1)! x_1^0 & \ldots & \frac{(q-1)!}{(q-m_1)!} x_1^{q-m_1} \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 & \ldots & \ldots & x_2^{q-1} \\ 0 & x_2^0 & 2x_2^1 & \ldots & \ldots & (q-1)x_2^{q-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ldots & \ldots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{0,n} \\ \alpha_{1,n} \\ \vdots \\ \alpha_{q-1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^n \\ n x_1^{n-1} \\ \vdots \\ \frac{n!}{(n-m_1+1)!} x_1^{n-m_1+1} \\ x_2^n \\ n x_2^{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{n!}{(n-m_r+1)!} x_r^{n-m_r+1} \end{pmatrix}$$

que l'on notera $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ pour alléger les écritures. En admettant que la matrice A soit inversible, il s'ensuit que la solution est à coordonnées combinaison linéaire des coordonnées de B. Comme les séries $\sum \dfrac{n!}{(n-k)!} \dfrac{x^{n-k}}{n!} = \sum \dfrac{x^{n-k}}{(n-k)!}$ avec x réel convergent, il en résulte que le procédé de calcul d'une exponentielle avec un polynôme annulateur fonctionne. Justifions que la matrice A est inversible. On pose

$$\Phi\colon \begin{cases} \mathbb{K}_{q-1}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{K}^q \\ \quad \mathrm{P} \quad \longmapsto \big(\mathrm{P}(x_1), \mathrm{P}'(x_1), \ldots, \mathrm{P}^{(m_1-1)}(x_1), \mathrm{P}(x_2), \mathrm{P}'(x_2) \ldots, \ldots, \mathrm{P}(x_r), \mathrm{P}'(x_r), \ldots, \mathrm{P}^{(m_r-1)}(x_r)\big) \end{cases}$$

Notant $\mathscr{B} = (1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^{q-1})$ et $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{K}^q$, on observe que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \Phi = \mathrm{A}$$

L'application φ est linéaire par linéarité de la dérivation et de l'évaluation. Soit $\mathrm{P} \in \operatorname{Ker} \Phi$. On a

$$\forall i \in [\![1 ; r]\!] \qquad (\mathrm{X} - x_i)^{m_i} | \mathrm{P}$$

Or, les polynômes $(\mathrm{X} - x_i)^{m_i}$ sont premiers entre eux et par conséquent

$$\prod_{i=1}^{r} (\mathrm{X} - x_i)^{m_i} | \mathrm{P} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{r} m_i = b$$

On conclut que $\mathrm{P} = 0$. Ainsi, l'application linéaire Φ est injective entre deux espaces de même dimension finie. On conclut que Φ est un isomorphisme et la matrice A est donc inversible.