Devoir en temps libre n°14

Problème I

1. Un récurrence directe permet de montrer la propriété mais certains ont néanmoins réussi à rendre la tâche hasardeuse...

2. OK mais bien mentionner qu'on traite une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée.

3. Le premier encadrement vient par caractérisation d'une borne inférieure, nul besoin de recourir à une preuve par l'absurde. Pour la suite, il est indispensable de quantifier et il faut contrôler notamment le terme qui vient du reste et qui dépend de n.

4. Assez bien traitée. Pour justifier l'égalité en loi de $\sum\limits_{i=m+1}^{m+n} \mathrm{X}_i$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$, il faut mentionner que les variables X_i sont indépendantes et identiquement distribuées.

5. Le passage au logarithme requiert de s'assurer que les quantités concernées sont strictement positives.

Problème II

1. Question peu réussie. On ne connaît pas le signe des valeurs prises par la variable X et il faut donc faire bon usage de la valeur absolue, ce qui semble problématique pour beaucoup et pour lesquels une reprise de la question s'impose.

2. Question très peu comprise. Certains détaillent une récurrence pour le caractère $\mathscr{C}^\infty$ des u_n alors que c'est trivial. La mise en facteur de $\mathrm{e}^{\tau|x_n|}\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$ dans l'expression de $\|u_n^{(k)}\|_{\infty,[-a\,;a]}$ avec k, n entiers et $a \in \,]\,0\,;\tau\,[$ (ouvert en τ ! ce point est décisif) et l'étude du caractère borné sont très peu abordées. Certains divisent sans se préoccuper de la nullité ou non du terme au dénominateur, quelques rares invoquent les croissances comparées mais en s'appuyant sur un hypothétique comportement asymptotique de la suite $(x_n)_n$. À reprendre pour tous.

3. Il faut citer le théorème de transfert puis citer la convergence normale donc uniforme sur tout segment de $]-\tau\,;\tau\,[$ pour invoquer le théorème de régularité des séries de fonctions.

4. Avec $t \geqslant 0$, on a seulement l'inclusion $\{\mathrm{S}_n \geqslant na\} \subset \left\{\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} \geqslant \mathrm{e}^{tna}\right\}$ pour n entier non nul, ce qui suffit pour la suite. Quelques uns justifient convenablement la positivité de la variable aléatoire avant d'appliquer l'inégalité de Markov. Quasiment personne n'évoque le fait que les variables $\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i}$ sont indépendantes et dans L^1 pour invoquer le découplage de l'espérance $\mathbb{E}\left(\prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i}\right)$.

5. OK.

6. Certains procèdent au développement limité dans l'écriture de φ après transfert, en tant que somme infinie, et manipulent les sommes infinies de o sans rien justifier. Le recours au théorème

de Taylor-Young sur φ directement est la bonne stratégie.

7. Parmi ceux qui trouvent le bon équivalent, très peu pensent à justifier que la constante multiplicative est non nulle (ce qui permet de dire que c'est effectivement un équivalent).

8. Le « passage à la borne inférieure » mérite quelques détails. On peut aussi plus simplement travailler avec un t_0 bien choisi dans $\mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$.