ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°64

Exercice 1 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X variable aléatoire de loi $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{X} \text{ pair})$.

Corrigé : On trouve par σ-additivité

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \text{ pair}) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \{\mathrm{X} = 2n\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = 2n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

Ainsi $$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{X} \text{ pair}) = \mathrm{e}^{-\lambda} \operatorname{ch}(\lambda)}$$

Exercice 2 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ variables aléatoires indépendantes avec $\mathrm{X}_i \sim \mathscr{P}(\lambda_i)$ et les $\lambda_i > 0$. Déterminer, de deux manières différentes, la loi de $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$.

Corrigé : On a $\mathrm{G}_{\mathrm{X}_i}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_i(t-1)}$ pour $t \in [\,0\,;1\,]$ et $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$. Par indépendance des X_i, notant $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$, il vient

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{G}_{\mathrm{X}_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_i(t-1)} = \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (t-1)}$$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on en déduit que $\mathrm{S}_n \sim \mathscr{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$. On peut procéder par récurrence sur n. Considérons X et Y variables aléatoires indépendantes avec $\mathrm{X} \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathrm{Y} \sim \mathscr{P}(\mu)$, $\lambda, \mu > 0$. On a $(\mathrm{X}+\mathrm{Y})(\Omega) \subset \mathbb{N}$ puis pour n entier, il vient par probabilités totales

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y} = n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Y} = n-k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Y} = n-k) \\ &= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} (\lambda+\mu)^n}{n!}\end{aligned}$$

L'hérédité de la récurrence s'ensuit. On conclut

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \sim \mathscr{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)}$$

Exercice 3 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X variable aléatoire de loi $\mathscr{G}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$. Justifier que $1/\mathrm{X}$ admet une espérance finie puis la calculer.

Corrigé : Par transfert, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{X}} \text{ d'espérance finie } &\iff \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\mathbb{P}(\mathrm{X}=n) \text{ converge}\\ &\iff \sum_{n\geqslant 1} \frac{(1-p)^n}{n}\frac{p}{1-p} \text{ converge}\end{aligned}$$

La série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ admet un rayon de convergence égal à 1 ce qui prouve que $\frac{1}{\mathrm{X}}$ est d'espérance finie. Puis, on a

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right) = \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^n}{n} = -\frac{p}{1-p}\ln(1-(1-p))$$

Ainsi $\boxed{\text{La variable } \frac{1}{\mathrm{X}} \text{ est d'espérance finie avec } \mathbb{E}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right) = \frac{p}{p-1}\ln p.}$

Exercice 4 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})$.

Corrigé : On a par σ-additivité et indépendance de X et Y

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y}) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=0}^{+\infty}\{\mathrm{X}=k,\mathrm{Y}=k\}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k,\mathrm{Y}=k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k)$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}\mathrm{e}^{-2\lambda}}$

Exercice 5 (*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle telle que X et $f(\mathrm{X})$ sont dans L^1. Montrer

$$f(\mathbb{E}(\mathrm{X})) \leqslant \mathbb{E}(f(\mathrm{X}))$$

Corrigé : La fonction f est convexe donc son graphe se situe au dessus de ses tangentes. En particulier, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \geqslant f'(\mathbb{E}(\mathrm{X}))(x-\mathbb{E}(\mathrm{X})) + f(\mathbb{E}(\mathrm{X}))$$

d'où $$f(\mathrm{X}) \geqslant f'(\mathbb{E}(\mathrm{X}))(\mathrm{X}-\mathbb{E}(\mathrm{X})) + f(\mathbb{E}(\mathrm{X}))$$

Passant à l'espérance, on conclut $\boxed{f(\mathbb{E}(\mathrm{X})) \leqslant \mathbb{E}(f(\mathrm{X}))}$

Exercice 6 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires dans L^2. On note la matrice des covariances $\Sigma = \big(\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer

$$\Sigma \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$$

Corrigé : L'ensemble L^2 possède une structure d'espace vectoriel et par linéarité de l'espérance, la forme

$$(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \mapsto \mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathbb{E}\left((\mathrm{X}-\mathbb{E}(\mathrm{X}))(\mathrm{Y}-\mathbb{E}(\mathrm{Y}))\right)$$

est bilinéaire symétrique sur cet espace. Pour $\mathrm{U} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on trouve

$$\mathrm{U}^\top \Sigma \mathrm{U} = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \mathrm{X}_i, \sum_{j=1}^{n} u_j \mathrm{X}_j\right) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \mathrm{X}_i\right) \geqslant 0$$

Par caractérisation d'une matrice positive, on conclut

$$\boxed{\Sigma \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})}$$

Exercice 7 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y des variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in \,]\,0\,;1\,[$. On note A la matrice aléatoire réelle définie par

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathrm{A}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathrm{X}(\omega) & \mathrm{X}(\omega) \\ -\mathrm{Y}(\omega) & -\mathrm{Y}(\omega) \end{pmatrix}$$

Déterminer $$\mathbb{P}(\mathrm{A} \text{ nilpotente})$$

Corrigé : Pour $\omega \in \Omega$, la matrice $\mathrm{A}(\omega)$ est d'ordre 2 et par conséquent

$$\{\mathrm{A} \text{ nilpotente}\} = \{\mathrm{A}^2 = 0\} = \{\mathrm{X}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}) = 0, \mathrm{Y}(\mathrm{Y}-\mathrm{X}) = 0\} = \{\mathrm{X} = \mathrm{Y}\}$$

Puis, par σ-additivité et indépendance de X et Y

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y}) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \{\mathrm{X}=n, \mathrm{Y}=n\}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}=n,\mathrm{Y}=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}=n)\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n)$$

On conclut $$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{A} \text{ nilpotente}) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2(n-1)} = \frac{p}{2-p}}$$

Exercice 8 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{G}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$. Déterminer la loi de $\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})$.

Corrigé : On note $\mathrm{Z} = \min(\mathrm{X},\mathrm{Y})$. On a clairement $\mathrm{Z}(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ puis, par indépendance et égalité en loi

$$\mathbb{P}(\mathrm{Z} > k) = \mathbb{P}(\mathrm{X} > k, \mathrm{Y} > k) = \mathbb{P}(\mathrm{X} > k)\mathbb{P}(\mathrm{Y} > k) = \mathbb{P}(\mathrm{X} > k)^2$$

Puis $$\mathbb{P}(\mathrm{X} > k) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{\ell=k+1}^{+\infty} \{\mathrm{X} = \ell\}\right) = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}=\ell) = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{\ell-1} = (1-p)^k$$

Ainsi $$\mathbb{P}(\mathrm{Z} > k) = (1-p)^{2k}$$

Puis $$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \begin{aligned} \mathbb{P}(\mathrm{Z}=k) &= \mathbb{P}\left(\{\mathrm{Z} > k-1\} \setminus \{\mathrm{Z} > k\}\right) = \mathbb{P}(\mathrm{Z} > k-1) - \mathbb{P}(\mathrm{Z} > k) \\ &= (1-p)^{2(k-1)} - (1-p)^{2k} = (1-(1-p)^2)(1-p)^{2(k-1)} \end{aligned}$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{Z} \sim \mathscr{G}(1-(1-p)^2)}$$

Remarque : On peut aussi établir le caractère sans mémoire de Z.

Exercice 9 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer $\quad \forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{A}^2 \qquad |\mathbb{P}(\mathrm{A}) - \mathbb{P}(\mathrm{B})| \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}}) + \mathbb{P}(\bar{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$

2. En déduire $\quad \forall t \in [0;1] \qquad |\mathrm{G_X}(t) - \mathrm{G_Y}(t)| \leqslant 2\mathbb{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y})$

Corrigé : 1. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{A}^2$. On a

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) - \mathbb{P}(\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}}) - \big(\mathbb{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) + \mathbb{P}(\mathrm{B} \cap \bar{\mathrm{A}})\big) = \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}}) - \mathbb{P}(\mathrm{B} \cap \bar{\mathrm{A}})$$

Ainsi $\quad \boxed{\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{A}^2 \qquad |\mathbb{P}(\mathrm{A}) - \mathbb{P}(\mathrm{B})| \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}}) + \mathbb{P}(\bar{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})}$

2. Soit $t \in [0;1]$. On a par linéarité du symbole somme

$$|\mathrm{G_X}(t) - \mathrm{G_Y}(t)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(\mathrm{X} = n) - \mathbb{P}(\mathrm{Y} = n))\, t^n \right|$$

D'après le résultat de la question précédente, on a pour n entier

$$|\mathbb{P}(\mathrm{X} = n) - \mathbb{P}(\mathrm{Y} = n)|\, t^n \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{X} = n, \mathrm{Y} \neq n) + \mathbb{P}(\mathrm{X} \neq n, \mathrm{Y} = n)$$

et les séries $\sum \mathbb{P}(\mathrm{X} = n, \mathrm{Y} \neq n)$, $\sum \mathbb{P}(\mathrm{X} \neq n, \mathrm{Y} = n)$ convergent avec par σ-additivité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = n, \mathrm{Y} \neq n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = n, \mathrm{Y} \neq \mathrm{X}) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y})$$

et de même pour l'autre somme. Ainsi, on obtient par inégalité triangulaire et linéarité du symbole somme

$$\begin{aligned} |\mathrm{G_X}(t) - \mathrm{G_Y}(t)| &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(\mathrm{X} = n) - \mathbb{P}(\mathrm{Y} = n)|\, t^n \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = n, \mathrm{Y} \neq n) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} \neq n, \mathrm{Y} = n) \end{aligned}$$

On conclut $\quad \boxed{\forall t \in [0;1] \qquad |\mathrm{G_X}(t) - \mathrm{G_Y}(t)| \leqslant 2\mathbb{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y})}$

Exercice 10 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^2$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X})$.

1. Établir $\quad \forall t > 0 \qquad t \leqslant \mathbb{E}\left[(t - \mathrm{Y})\mathbb{1}_{\mathrm{Y} < t}\right]$

2. En déduire $\quad \forall t > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}) \geqslant t) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(\mathrm{X})}{\mathbb{V}(\mathrm{X}) + t^2}$

Corrigé : 1. On a $\quad t - \mathrm{Y} \leqslant (t - \mathrm{Y})\mathbb{1}_{t - \mathrm{Y} > 0}$

Par croissance de l'espérance

$$\boxed{\forall t > 0 \qquad \mathbb{E}(t - \mathrm{Y}) = t \leqslant \mathbb{E}((t - \mathrm{Y})\mathbb{1}_{\mathrm{Y} < t})}$$

2. Soit $t > 0$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\mathbb{E}((t - \mathrm{Y})\mathbb{1}_{\mathrm{Y} < t})^2 \leqslant \mathbb{E}((t - \mathrm{Y})^2)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{Y} < t}^2) = (t^2 + \mathbb{E}(\mathrm{Y}^2))\, \mathbb{P}(\mathrm{Y} < t)$$

Ainsi $\quad \dfrac{t^2}{t^2 + \mathbb{V}(\mathrm{X})} \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{Y} < t) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(\mathrm{Y} \geqslant t) \leqslant 1 - \dfrac{t^2}{t^2 + \mathbb{V}(\mathrm{X})}$

D'où $$\boxed{\forall t > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}) \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{X})}{\mathbb{V}(\mathrm{X}) + t^2}}$$

Remarque : Il s'agit de *l'inégalité de Tchebychev-Cantelli*. En appliquant le résultat à la variable aléatoire $-\mathrm{X}$, on obtient

$$\forall t > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}) \leqslant -t) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{X})}{\mathbb{V}(\mathrm{X}) + t^2}$$

Or, pour $t > 0$, on a

$$\{|\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X})| \geqslant t\} = \{\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}) \geqslant t\} \sqcup \{\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}) \leqslant -t\}$$

d'où $$\mathbb{P}\left(|\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X})| \geqslant t\right) \leqslant \frac{2\mathbb{V}(\mathrm{X})}{\mathbb{V}(\mathrm{X}) + t^2}$$

inégalité de concentration concurrente de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. On a

$$\frac{\mathbb{V}(\mathrm{X})}{\mathbb{V}(\mathrm{X}) + t^2} \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{X})}{t^2} \iff \mathbb{V}(\mathrm{X})\left(\mathbb{V}(\mathrm{X}) - t^2\right) \geqslant 0$$

Si X n'est pas constant presque sûrement, cette inégalité est plus fine que celle de Bienaymé-Tchebychev pour $t \in \left]0\,;\sigma(\mathrm{X})\right[$.

Exercice 11 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et X variable aléatoire de loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1. Rappeler la définition de $\mathrm{G_X}$ et préciser son expression sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer l'inégalité
$$\forall t \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 2\lambda) \leqslant \exp\varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = -2\lambda\ln t + \lambda(t-1)$$
3. En déduire $$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^{\lambda}$$

Corrigé : 1. La fonction génératrice $\mathrm{G_X}$ est définie par la somme de la série entière

$$\sum t^k\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \sum t^k\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum\frac{(t\lambda)^k}{k!}$$

Il s'agit donc d'un scalaire multiplié par une série exponentielle de rayon de convergence $+\infty$ d'où la convergence de cette série pour tout t réel avec

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{G_X}(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}$$

2. Pour $t \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto t^x = \mathrm{e}^{x\ln t}$ est croissante d'où l'inclusion $\{\mathrm{X} \geqslant 2\lambda\} \subset \left\{t^{\mathrm{X}} \geqslant t^{2\lambda}\right\}$ puis l'inégalité

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 2\lambda) \leqslant \mathbb{P}(t^{\mathrm{X}} \geqslant t^{2\lambda})$$

D'après l'inégalité de Markov (la variable aléatoire t^{X} est positive et d'espérance finie d'après la première question), il vient

$$\mathbb{P}(t^{\mathrm{X}} \geqslant t^{2\lambda}) \leqslant \frac{1}{t^{2\lambda}}\mathbb{E}(t^{\mathrm{X}}) = \mathrm{e}^{-2\lambda\ln t}\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$$

Ainsi $$\boxed{\forall t \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 2\lambda) \leqslant \exp\varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = -2\lambda\ln t + \lambda(t-1)}$$

3. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[1\,;+\infty\right[$ puis

$$\forall t \geqslant 1 \qquad \varphi'(t) = -\frac{2\lambda}{t} + \lambda \geqslant 0 \iff t \geqslant 2$$

Ainsi, la fonction φ admet un minimum en $t = 2$ et donc, on a en particulier

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 2\lambda) \leqslant \exp \varphi(2) = \exp\left[\lambda(1 - 2\ln 2)\right]$$

Autrement dit $$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^{\lambda}}$$