ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°65

Exercice 1 (***)

Soit $\mathrm{Z} \sim \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer $\mathbb{V}(\mathrm{X})$ où $\mathrm{X} = \mathbb{1}_{3|\mathrm{Z}} \dfrac{\mathrm{Z}}{3}$.

Corrigé : On note $\mathrm{S}_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{3n+k}}{(3n+k)!}$ pour $k \in [\![0\,;\,2]\!]$. Les séries entières définissant ces sommes ont un rayon de convergence infini. Puis, on trouve pour x réel

$$\begin{cases} \mathrm{S}_0(x) + \mathrm{S}_1(x) + \mathrm{S}_2(x) & = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{S}_0(x) + j\mathrm{S}_1(x) + j^2\mathrm{S}_2(x) & = \mathrm{e}^{jx} \\ \mathrm{S}_0(x) + j^2\mathrm{S}_1(x) + j\mathrm{S}_2(x) & = \mathrm{e}^{j^2x} \end{cases}$$

Avec des combinaisons linéaires adaptées, on trouve pour x réel

$$\mathrm{S}_0(x) = \frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{jx} + \mathrm{e}^{j^2x}\right] \qquad \mathrm{S}_1(x) = \frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^x + j^2\mathrm{e}^{jx} + j\mathrm{e}^{j^2x}\right]$$

et
$$\mathrm{S}_2(x) = \frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^x + j\mathrm{e}^{jx} + j^2\mathrm{e}^{j^2x}\right]$$

Les séries entières $\sum \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ et $\sum n^2 \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ ont même rayon de convergence et il s'ensuit que X admet un moment d'ordre 2. Puis, pour x réel

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{x}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} = \frac{x}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!} = \frac{x}{3}\mathrm{S}_2(x)$$

et
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\frac{x^{3n}}{(3n)!} &= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[3n(3n-1)+3n\right]\frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{x^2}{9}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{x^{3n}}{(3n)!} \\ &= \frac{x^2}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} + \frac{x}{9}\mathrm{S}_2(x) = \frac{x}{9}\left[x\mathrm{S}_1(x) + \mathrm{S}_2(x)\right]\end{aligned}$$

Ainsi
$$\boxed{\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \frac{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}}{9}\left[\lambda\mathrm{S}_1(\lambda) + \mathrm{S}_2(\lambda) - \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{S}_2(\lambda)^2\right]}$$

Exercice 2 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ et N une variable aléatoire indépendante des X_n à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose
$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathrm{S}_\mathrm{N}(\omega) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}(\omega)} \mathrm{X}_k(\omega)$$

1. Justifier que S_N est une variables aléatoire discrète.
2. Montrer l'égalité $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_\mathrm{N}} = \mathrm{G}_\mathrm{N} \circ \mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}$.
3. On suppose X_1 et N d'espérance finie. Montrer que S_N est d'espérance finie et préciser $\mathbb{E}(\mathrm{S}_\mathrm{N})$ en fonction de $\mathbb{E}(\mathrm{N})$ et $\mathbb{E}(\mathrm{X}_1)$.
4. On suppose que $\mathrm{X}_1 \sim \mathscr{B}(p)$ et $\mathrm{N} \sim \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer la loi de S_N.

5. Retrouver le résultat précédent sans passer par les fonctions génératrices.

Corrigé : 1. On a clairement $\mathrm{S_N}(\Omega) \subset \mathbb{N}$ puis

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \{\mathrm{S_N} = k\} = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \left(\{\mathrm{N} = n\} \cap \left\{ \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i = k \right\} \right)$$

et $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ est une variable aléatoire comme fonction du vecteur aléatoire $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$. Ainsi, pour k entier, l'ensemble $\{\mathrm{S_N} = k\}$ est une union dénombrable d'événements donc un événement ce qui prouve

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{S_N} \text{ est une variable aléatoire réelle discrète.}}$$

2. Soit $t \in [0\,;1]$. Par transfert puis probabilités totales avec le système complet $(\{\mathrm{N} = n\})_{n\in\mathbb{N}}$ et indépendances des X_k avec N, il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{G_{S_N}}(t) &= \sum_{j=0}^{+\infty} t^j \mathbb{P}(\mathrm{S_N} = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} t^j \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_k = j, \mathrm{N} = n \right) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^j \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k = j \right) \mathbb{P}(\mathrm{N} = n) \right) \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini pour des familles à termes positifs et indépendance des X_k, on obtient

$$\mathrm{G_{S_N}}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} t^j \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = j) \right) \mathbb{P}(\mathrm{N} = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) \mathbb{P}(\mathrm{N} = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{G_{X_1}}(t)^n \mathbb{P}(\mathrm{N} = n)$$

D'où
$$\boxed{\mathrm{G_{S_N}} = \mathrm{G_N} \circ \mathrm{G_{X_1}}}$$

3. On a $\mathrm{G_N}$ et $\mathrm{G_{X_1}}$ dérivable en 1. Comme $\mathrm{G_{X_1}}(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = k) = 1$, on a donc $\mathrm{G_N} \circ \mathrm{G_{X_1}}$ dérivable en 1 ce qui prouve que $\mathrm{S_N}$ est d'espérance finie et on trouve

$$\mathbb{E}(\mathrm{S_N}) = \mathrm{G}'_{\mathrm{S_N}}(1) = \mathrm{G}'_{\mathrm{X_1}}(1)\mathrm{G}'_{\mathrm{N}} \circ \mathrm{G_{X_1}}(1) = \mathrm{G}'_{\mathrm{X_1}}(1)\mathrm{G}'_{\mathrm{N}}(1)$$

On conclut
$$\boxed{\text{La variable } \mathrm{S_N} \text{ est d'espérance finie et } \mathbb{E}(\mathrm{S_N}) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_1)\mathbb{E}(\mathrm{N}).}$$

Remarque : La dernière égalité est appelée *identité de Wald*.

4. On a

$$\forall t \in [0\,;1] \qquad \mathrm{G_{S_N}}(t) = \mathrm{G_N}(\mathrm{G_{X_1}}(t)) = \mathrm{G_N}(pt + 1 - p) = \mathrm{e}^{\lambda(pt+1-p-1)} = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)}$$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on conclut

$$\boxed{\mathrm{S_N} \sim \mathscr{P}(p\lambda)}$$

5. Soit $k \in \mathbb{N}$. La famille $(\{\mathrm{N} = n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, il vient

$$\mathbb{P}(\mathrm{S_N} = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{S_N} = k, \mathrm{N} = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i = k, \mathrm{N} = n \right)$$

Les variables X_i et N sont indépendantes d'où

$$\mathbb{P}(\mathrm{S_N} = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i = k \right) \mathbb{P}(\mathrm{N} = n)$$

On a $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \sim \mathscr{B}(n,p)$ d'où $\mathbb{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i = k\right) = 0$ pour $n < k$ et par suite

$$\mathbb{P}(\mathrm{S_N} = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i = k\right) \mathbb{P}(\mathrm{N} = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-n}$$

D'où $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S_N} = k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}$$

Avec le changement d'indice $\ell = n - k$, on reconnaît une exponentielle

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S_N} = k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{\ell}}{\ell!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda p}$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{S_N} \sim \mathscr{P}(p\lambda)}$$

Exercice 3 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$. Pour $c > \lambda$, montrer qu'il existe $r \in \left]\,0\,;1\,\right[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant nc) \leqslant r^n$$

Corrigé : Soit $t > 0$ et $n \geqslant 1$. Par croissance stricte de $u \mapsto \mathrm{e}^{tu}$, on a $\{\mathrm{S}_n \geqslant nc\} = \left\{\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} \geqslant \mathrm{e}^{tnc}\right\}$.
La série $\sum \mathrm{e}^{tn} \frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum \frac{(\mathrm{e}^{\,t}\lambda)^n}{n!}$ converge (série exponentielle) et par transfert, on a

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{tn} \frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\,t} - 1)}$$

La variable $\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{t\mathrm{X}_k}$ est d'espérance finie comme produit de variables indépendantes d'espérance finie. D'après l'inégalité de Markov avec la variable alétoire positive $\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}$ et par égalité en loi des X_k, il vient

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant nc) = \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} \geqslant \mathrm{e}^{tnc}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-tnc} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}\right) = \mathrm{e}^{-tnc} \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{t\mathrm{X}_k}\right) = \mathrm{e}^{-tnc} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_1}\right)^n$$

Ainsi $$\forall t > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant nc) \leqslant \exp(n\varphi(t)) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = -tc + \lambda(\mathrm{e}^t - 1)$$

D'après les théorèmes généraux, on a $\varphi \in \mathscr{C}^1(\left]\,0\,;+\infty\,\right[, \mathbb{R})$ et

$$\forall t > 0 \qquad \varphi'(t) = -c + \lambda \mathrm{e}^t < 0 \iff t < \ln\left(\frac{c}{\lambda}\right) \quad \text{avec} \quad \ln\left(\frac{c}{\lambda}\right) > 0$$

D'où $$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant nc) \leqslant \exp\left[n\varphi\left(\ln\left(\frac{c}{\lambda}\right)\right)\right]$$

Comme $\varphi(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ et que φ décroît strictement sur $\left]\,0\,; \ln\left(\frac{c}{\lambda}\right)\right[$, on en déduit

$$\varphi\left(\ln\left(\frac{c}{\lambda}\right)\right) < 0$$

On conclut $$\boxed{\exists r \in \left]\,0\,;1\,\right[\quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant nc) \leqslant r^n}$$

Variante : On peut aussi observer

$$\varphi(t) \underset{t \to 0}{=} -tc + \lambda\left(1 + t + \mathrm{o}(t) - 1\right) = t\left((\lambda - c) + \mathrm{o}(1)\right) \quad \text{avec} \quad \lambda - c < 0$$

On en déduit que la fonction φ prend des valeurs strictement négatives au voisinage de zéro ce qui permet de conclure.

Exercice 4 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{U}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1\,;\, \mathrm{N}]\!]$. Pour n entier non nul, on note

$$\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{U}_i \quad \text{et} \quad \mathrm{V}_n = \frac{\mathrm{S}_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad m = \mathbb{E}(\mathrm{U}_1) \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{\mathbb{V}(\mathrm{U}_1)}$$

Pour X une variable aléatoire avec $\mathrm{X}(\Omega)$ fini, on note $\mathrm{M}_{\mathrm{X}}(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}})$ avec t réel.

Montrer $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{M}_{\mathrm{V}_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$$

Corrigé : Les variables aléatoires sont finies. Soit t réel. Par indépendance des U_i, on a

$$\mathrm{M}_{\mathrm{V}_n}(t) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \exp\left[\frac{t(\mathrm{U}_i - m)}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\exp\left[\frac{t(\mathrm{U}_i - m)}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right)$$

Par transfert, il vient

$$\mathbb{E}\left(\exp\left[\frac{t(\mathrm{U}_i - m)}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right) = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \exp\left[\frac{t(k-m)}{\sigma\sqrt{n}}\right] = \frac{1}{\mathrm{N}} \exp\left(\frac{-tm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \exp\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^k$$

Ainsi, par une transformation de type « angle moitié », il vient

$$\mathbb{E}\left(\exp\left[\frac{t(\mathrm{U}_i - m)}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right) = \frac{1}{\mathrm{N}} \exp\left[\frac{-tm}{\sigma\sqrt{n}}\right] \exp\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \frac{1 - \exp\left(\dfrac{t\mathrm{N}}{\sigma\sqrt{n}}\right)}{1 - \exp\left(\dfrac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)} = \frac{1}{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{sh}\,(t\mathrm{N}/2\sigma\sqrt{n})}{\mathrm{sh}\,(t/2\sigma\sqrt{n})}$$

D'où $$\frac{1}{n}\ln\left(\mathrm{M}_{\mathrm{V}_n}(t)\right) = -\ln(\mathrm{N}) + \ln\left(\mathrm{sh}\,(t\mathrm{N}/2\sigma\sqrt{n})\right) - \ln\left(\mathrm{sh}\,(t/2\sigma\sqrt{n})\right)$$

Enfin, avec le développement usuel $\mathrm{sh}\,(u) = u + \dfrac{u^3}{6} + \mathrm{o}(u^3)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\ln\left(\mathrm{M}_{\mathrm{V}_n}(t)\right) &= -\ln(\mathrm{N}) + \ln\left(\frac{t\mathrm{N}}{2\sigma\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{6}\left(\frac{t\mathrm{N}}{2\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&\quad - \ln\left(\frac{t}{2\sigma\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{6}\left(\frac{t}{2\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
\frac{1}{n}\ln\left(\mathrm{M}_{\mathrm{V}_n}(t)\right) &= \frac{t^2}{2n} \times \frac{\mathrm{N}^2 - 1}{12\sigma^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{M}_{\mathrm{V}_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}}$$

Exercice 5 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes de même loi et d'espérance finie. Montrer

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\operatorname*{Max}_{k\in[\![1\,;\, n]\!]} |\mathrm{X}_k|\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Corrigé : On note $\mathrm{M}_n = \operatorname*{Max}_{k\in[\![1\,;\, n]\!]} |\mathrm{X}_k|$. Soit $a \geqslant 0$. On a pour $k \in [\![1\,;\, n]\!]$

$$|\mathrm{X}_k| = |\mathrm{X}_k|\,\mathbb{1}_{\{|\mathrm{X}_k| < a\}} + |\mathrm{X}_k|\,\mathbb{1}_{\{|\mathrm{X}_k| \geqslant a\}}$$

d'où $$|X_k| \leqslant a + \sum_{\ell=1}^{n} |X_\ell| \mathbb{1}_{\{|X_\ell| \geqslant a\}}$$

Ce majorant est indépendant de k et par conséquent

$$M_n \leqslant a + \sum_{k=1}^{n} |X_k| \mathbb{1}_{\{|X_k| \geqslant a\}}$$

Pour $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, la variable $|X_k| \mathbb{1}_{\{|X_k| \geqslant a\}}$ est positive majorée par $|X_k|$ et donc d'espérance finie. Ainsi, par linéarité de l'espérance et égalité en loi des X_k, il vient

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}(M_n) \leqslant \frac{a}{n} + \mathbb{E}\left(|X_1| \mathbb{1}_{\{|X_1| \geqslant a\}}\right)$$

On note $|X_1|(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ et on pose

$$\forall (n,a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \qquad u_n(a) = x_n \mathbb{1}_{[\,0\,;x_n\,]}(a) \mathbb{P}(|X_1| = x_n)$$

Par transfert, on a $$\mathbb{E}\left(|X_1| \mathbb{1}_{\{|X_1| \geqslant a\}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a)$$

Or, on a pour tout n entier

$$0 \leqslant u_n(a) \leqslant x_n \mathbb{P}(|X_1| = x_n) \quad \text{et} \quad u_n(a) \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0$$

La série de fonction $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément et par double limite

$$\mathbb{E}\left(|X_1| \mathbb{1}_{\{|X_1| \geqslant a\}}\right) \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, on choisit a assez grand pour avoir $\mathbb{E}\left(|X_1| \mathbb{1}_{\{|X_1| \geqslant a\}}\right) \leqslant \varepsilon$ puis on choisit un seuil N entier tel que $\dfrac{a}{n} \leqslant \varepsilon$ pour tout entier $n \geqslant N$. Par conséquent

$$\forall n \geqslant N \qquad \frac{1}{n}\mathbb{E}(M_n) \leqslant 2\varepsilon$$

On conclut $$\boxed{\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\operatorname*{Max}_{k \in [\![1\,;\,n]\!]} |X_k|\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0}$$

Exercice 6 (***)

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$. On note $M_n = \operatorname{Max}(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer un équivalent simple de $\mathbb{E}(M_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé : On note $q = 1 - p$. Soit k entier non nul. On a par indépendance des X_i

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant k)) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leqslant k\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant k)$$

puis par égalité en loi

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \mathbb{P}(X_i \leqslant k) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{\ell=1}^{k} \{X_i = \ell\}\right) = \sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}(X_i = \ell) = \sum_{\ell=1}^{k} p q^{\ell-1} = p\frac{1-q^k}{1-q} = 1 - q^k$$

et la formule vaut aussi pour $k = 0$. Ainsi, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(M_n \leqslant k) = (1-q^k)^n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(M_n > k) = 1 - (1-q^k)^n$$

et par antirépartition, on a dans $[\,0\,;+\infty\,]$

$$\mathbb{E}(\mathrm{M}_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{M}_n > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[1 - (1-q^k)^n\right]$$

On pose $\qquad \forall t \geqslant 0 \qquad f(t) = 1 - (1-q^t)^n$

La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, décroissante par composition. Par décroissance de f, il vient

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \qquad f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et par sommation

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{\mathrm{N}+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^{\mathrm{N}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On a $\qquad f(t) \underset{t\to+\infty}{=} 1 - (1 - nq^t + \mathrm{o}(q^t)) \underset{t\to+\infty}{\sim} nq^t = n\mathrm{e}^{t\ln(q)}$

On en déduit l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$ et faisant tendre $\mathrm{N} \to +\infty$ dans l'encadrement précédemment établi, il vient

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{M}_n) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On réalise le changement de variables $u = 1 - q^t$ qui équivaut à $t\ln(q) = \ln(1-u)$ d'où $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}u}{(1-u)\ln(q)}$. La fonction $u \mapsto \dfrac{\ln(1-u)}{\ln(q)}$ réalise une bijection de $]\,0\,;1\,[$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$, de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante. Ainsi, les intégrales concernées sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales avec

$$\int_0^{+\infty} \left[1-(1-q^t)^n\right]\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\ln(q)}\int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{\ln(q)}\int_0^1 \sum_{\ell=0}^{n-1} u^\ell\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{\ln(q)}\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{\ell+1}$$

Ainsi $\qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} \left[1-(1-q^t)^n\right]\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{\ln(q)}$

On conclut $\qquad \boxed{\mathbb{E}(\mathrm{M}_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(n)}{\ln(q)}}$

Remarque : Dans l'expression sommatoire

$$\mathbb{E}(\mathrm{M}_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[1 - (1-q^k)^n\right]$$

on peut aussi développer le binôme à l'intérieur puis permuter les sommes

$$\mathbb{E}(\mathrm{M}_n) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell}(-1)^\ell q^{k\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell}(-1)^\ell \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k\ell} = \sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell}(-1)^\ell \frac{q^\ell}{1-q^\ell}$$

Exercice 7 (***)

On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k)\mathrm{e}^{-n}\frac{n^k}{k!}$

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi de Poisson $\mathscr{P}(1)$. On note $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$ pour n entier non nul.

On pose $\qquad \forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Soit n entier non nul. Déterminer la fonction génératrice de S_n puis préciser sa loi.
2. Pour n entier non nul, justifier que $f\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right)$ est d'espérance finie puis en déduire que u_n est bien défini et déterminer une expression de $\mathbb{E}\left(f\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right)$ en fonction de u_n.
3. Soit $\eta > 0$. Établir $\qquad \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{\mathrm{S}_n}{n} - 1\right| \geqslant \eta\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$
4. Montrer $\qquad \forall x > 1 \qquad \ln(x)^2 \leqslant 2x$
5. Soit $\varepsilon > 0$ et n entier non nul. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que
$$\left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right) - f(1)\right| \leqslant \varepsilon \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) + \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right| \mathbb{1}_{\mathrm{A}_n}\right)$$
avec $\qquad \mathrm{A}_n = \left\{\left|\dfrac{\mathrm{S}_n}{n} - 1\right| \geqslant \eta\right\} \qquad \mathrm{B}_n = \left\{\left|\dfrac{\mathrm{S}_n}{n} - 1\right| < \eta\right\}$
6. En déduire un équivalent simple de u_n pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. Soit $t \in [\,0\,;1\,]$. Par indépendance des X_k, il vient pour n entier non nul
$$\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{G}_{\mathrm{X}_k}(t) = \mathrm{e}^{n\lambda(t-1)}$$
Ainsi $\qquad \boxed{\mathrm{S}_n \sim \mathscr{P}(n)}$

2. Soit n entier non nul. On a $f\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right)$ d'espérance finie si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \ln\left(\dfrac{k}{n}\right) \mathrm{e}^{-n}\dfrac{n^k}{k!}$ converge absolument ce qui équivaut à la convergence de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \ln(k)\dfrac{n^k}{k!}$ qui a lieu puisque $\ln(k) \underset{k\to+\infty}{=} \mathrm{o}(k)$ et que la série $\sum k\dfrac{n^k}{k!}$ converge. Par transfert, il vient
$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{e}^{-n}\frac{n^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k)\mathrm{e}^{-n}\frac{n^k}{k!} - \ln(n)$$
Ainsi $\qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right) = u_n - \ln(n)}$

3. Soit $\eta > 0$ et n entier non nul. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, il vient
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - 1\right| \geqslant \eta\right) \leqslant \frac{1}{\eta^2 n^2}\mathbb{V}(\mathrm{S}_n) \quad \text{avec} \quad \mathbb{V}(\mathrm{S}_n) = n$$
On conclut $\qquad \boxed{\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - 1\right| \geqslant \eta\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}$

4. On pose $\qquad \forall x \geqslant 1 \qquad \varphi(x) = \ln(x)^2 - 2x$

La fonction φ est dérivable sur $[\,1\,;+\infty\,[$ et par dérivation

$$\forall x \geqslant 1 \qquad \varphi'(x) = 2\left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right)$$

Or, par concavité, il vient $\qquad \forall x \geqslant 1 \qquad \ln(x) \leqslant x - 1 \leqslant x$

ce qui prouve $\varphi'(x) \leqslant 0$ pour $x \geqslant 1$ et comme $\varphi(1) = -2 < 0$, on conclut

$$\boxed{\forall x \geqslant 1 \qquad \ln(x)^2 \leqslant 2x}$$

5. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en 1, on dispose de $\eta > 0$ tel que

$$\forall x > 0 \qquad |x - 1| < \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(1)| < \varepsilon$$

Soit n entier non nul. Il vient par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(1)\right)\right| &\leqslant \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(1)\right|\right)\\ &\leqslant \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(1)\right| \mathbb{1}_{\mathrm{A}_n}\right) + \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(1)\right| \mathbb{1}_{\mathrm{B}_n}\right)\end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{\left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right) - f(1)\right| \leqslant \varepsilon \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) + \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right| \mathbb{1}_{\mathrm{A}_n}\right)}$$

6. Soit n entier non nul. On a $\qquad \ln(\mathrm{S}_n)^2 \leqslant 2\mathrm{S}_n$

et comme S_n est d'espérance finie puisque $\mathrm{S}_n \sim \mathscr{P}(n)$, on en déduit que $\ln\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right)^2$ également. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right| \mathbb{1}_{\mathrm{A}_n}\right)^2 \leqslant \mathbb{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)^2\right) \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$$

et
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)^2\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{k}{n}\right)^2 \mathrm{e}^{-n}\frac{n^k}{k!}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (\ln(k) - \ln(n))^2 \,\mathrm{e}^{-n}\frac{n^k}{k!}\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} 2\left(\ln(k)^2 + \ln(n)^2\right) \mathrm{e}^{-n}\frac{n^k}{k!}\\ \mathbb{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)^2\right) &\leqslant 4\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathrm{e}^{-n}\frac{n^k}{k!} + 2\ln(n)^2 \leqslant 4n + 2\ln(n)^2\end{aligned}$$

Ainsi $$\mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right| \mathbb{1}_{\mathrm{A}_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$$

d'où $$u_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$$

On conclut $$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

Exercice 8 (****)

Soit $s > 1$ et $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mathbb{P})$ espace probabilisé tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s} \quad \text{avec} \quad \lambda \text{ réel}$$

On pose $\qquad \forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid p \text{ divise } n\}$

et on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Montrer que les événements $(\mathrm{A}_p)_{p\in\mathcal{P}}$ sont indépendants.
3. Établir l'égalité $\qquad \zeta(s) = \prod\limits_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \dfrac{1}{p^s}\right)^{-1}$
4. La famille $\left(\dfrac{1}{p}\right)_{p\in\mathcal{P}}$ est-elle sommable ?

Corrigé : 1. Par σ-additivité, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \mathbb{P}(\mathbb{N}^*) = 1 = \lambda\zeta(s) \quad \text{avec} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Avec $\lambda = \dfrac{1}{\zeta(s)} > 0$, on a bien $\mathbb{P}(\{n\}) \geqslant 0$ pour n entier et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$ ce qui prouve que $\mathbb{P}$ définit bien une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$. Ainsi

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\zeta(s)}}$$

2. Soient $p_1, \ldots, p_n$ des nombres premiers distincts. On a

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{A}_{p_i} = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \quad p_i \text{ divise } n\} = \left\{n \in \mathbb{N}^* \mid \prod_{i=1}^{n} p_i \text{ divise } n\right\}$$

Puis, pour p entier non nul, on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_p) = \mathbb{P}\left(\{pk, k \in \mathbb{N}^*\}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{(pk)^s} = \frac{\lambda\zeta(s)}{p^s} = \frac{1}{p^s}$$

Ainsi $\qquad \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{A}_{p_i}\right) = \dfrac{1}{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} p_i\right)^s} = \prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{p_i^s} = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{A}_{p_i})$

Ce qui prouve $\qquad \boxed{\text{Les événements } (\mathrm{A}_p)_{p\in\mathcal{P}} \text{ sont indépendants.}}$

3. Le seul entier qui n'est divisible par aucun nombre premier est 1, autrement dit

$$\{1\} = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{\mathrm{A}_p}$$

Notons $\mathcal{P} = \{p_n, n \in \mathbb{N}^*\}$. On sait que l'ensemble $\mathcal{P}$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$ donc dénombrable ce qui justifie la numérotation des nombres premiers. On a par continuité décroissante puis indépendance des A_p

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{\mathrm{A}_{p_n}}\right) &= \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\mathrm{N}} \overline{\mathrm{A}_{p_n}}\right) \\ &= \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{A}_{p_n}}\right) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} (1 - \mathbb{P}(\mathrm{A}_{p_n})) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)\end{aligned}$$

D'où
$$\mathbb{P}(\{1\}) = \lambda = \frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

Passant à l'inverse, on conclut
$$\boxed{\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}}$$

4. On a
$$\prod_{p\in\mathscr{P}, p\leqslant \mathrm{N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \prod_{p\in\mathscr{P}, p\leqslant \mathrm{N}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^k} \geqslant \prod_{p\in\mathcal{P}, p\leqslant \mathrm{N}} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{p^k}$$

Notant $\{p \in \mathcal{P}, p \leqslant \mathrm{N}\} = \{p_1, \ldots, p_r\}$, il vient
$$\prod_{p\in\mathcal{P}, p\leqslant \mathrm{N}} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{p^k} = \prod_{i=1}^{r} \sum_{k_i=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{p_i^{k_i}} = \sum_{0\leqslant k_1,\ldots,k_r\leqslant \mathrm{N}} \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{k_i}}$$

En remarquant que tout entier de $[\![1\,;\, \mathrm{N}]\!]$ se décompose en produit de facteurs premiers inférieurs à N, il vient
$$\sum_{0\leqslant k_1,\ldots,k_r\leqslant \mathrm{N}} \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{k_i}} \geqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n}$$

D'où
$$\boxed{\prod_{p\in\mathscr{P}, p\leqslant \mathrm{N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \geqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n}}$$

On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} +\infty$ d'où par comparaison
$$\prod_{p\in\mathcal{P}, p\leqslant \mathrm{N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} +\infty$$

Or, on a
$$\ln \prod_{p\in\mathcal{P}, p\leqslant \mathrm{N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \sum_{p\in\mathcal{P}, p\leqslant \mathrm{N}} - \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Notant $\mathcal{P} = \{p_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ avec $(p_n)_{n\geqslant 1}$ strictement croissante, on a $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ puis
$$-\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p_n}$$

ce qui prouve que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} - \ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ sont de même nature et avec
$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} - \ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) = \sum_{p\in\mathcal{P}, p\leqslant p_\mathrm{N}} - \ln\left(-1 - \frac{1}{p}\right) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} +\infty$$

on conclut que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ diverge, autrement dit

$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{p}\right)_{p\in\mathcal{P}} \text{ n'est pas sommable.}}$$