Préparation à l'interrogation n°18

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de

$$\begin{aligned}\frac{t}{\mathrm{e}^t-1} &= t\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\mathrm{o}(t^3)-1\right)^{-1}\\ &= \left(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}+\mathrm{o}(t^2)\right)^{-1} = 1-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{6}+\left(\frac{t}{2}\right)^2+\mathrm{o}(t^2) = 1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{12}+\mathrm{o}(t^2)\end{aligned}$$

2. Équivalent en $+\infty$ de $\mathrm{th}\,(t)-1$.

2 Trigonométrie

1. $\sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$
2. $\sin(t)^2 = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$

3 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \sin(t)^2\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$

4 Algèbre linéaire

1. Théorème du rang : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-ev.

   On a $$\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rg}\,(f)$$

2. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ avec E et F des $\mathbb{K}$-ev de <u>même</u> dimension finie. On a

   $$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

   En particulier, si $\mathrm{E}=\mathrm{F}$, on a

   $$f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{Ker}\, f = \{0_\mathrm{E}\} \iff \mathrm{rg}\,(f) = \dim \mathrm{E} \iff \det(f) \neq 0$$

5 Réduction

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^n - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{X}^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(\mathrm{A})$;
2. On a A trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$;
3. $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \qquad 1 \leqslant \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) \leqslant m_\lambda(\mathrm{A})$;
4. Si A admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

6 Exercice type

$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \exp(\mathrm{A}) \in \mathbb{K}[\mathrm{A}]$$

Corrigé : La suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}} \dfrac{\mathrm{A}^k}{k!}\right)_{\mathrm{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{K}[\mathrm{A}]$ sev de dimension finie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donc fermé de cet espace et comme la suite est convergente, sa limite appartient à $\mathbb{K}[\mathrm{A}]$, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{A}} \in \mathbb{K}[\mathrm{A}]}$$

7 Exercice type

$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \det(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})}$$

Corrigé : On se place dans $\mathbb{C}$. Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et T triangulaire supérieure stricte telles que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D} + \mathrm{T}$. Il s'ensuit

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\mathrm{P} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n}) + \mathrm{Q}$$

avec Q triangulaire supérieure stricte. Par conséquent

$$\boxed{\det(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})}}$$

8 Exercice type

Soient p, q dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ avec I intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{H}$$

Montrer qu'une solution non nulle de (H) admet un nombre fini de zéros sur tout segment de I.

Corrigé : Soit y solution non nulle de (H) et $[\,a\,;b\,] \subset \mathrm{I}$. Supposons qu'il existe une suite $(\alpha_n)_n$ d'éléments deux à deux distincts de $[\,a\,;b\,]$ qui soient des zéros de y. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ telle que $\alpha_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \in [\,a\,;b\,]$. Par continuité, on a

$$0 = y(\alpha_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} y(\alpha) = 0$$

Quitte à ré-extraire, on suppose $\alpha_{\varphi(n)} \neq \alpha$ pour n entier. Par dérivabilité en α, il vient

$$0 = \frac{y(\alpha_{\varphi(n)}) - y(\alpha)}{\alpha_{\varphi(n)} - \alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} y'(\alpha)$$

La fonction y est donc solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(\alpha) = y'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Comme la fonction nulle en est solution, il s'ensuit que y est nulle d'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, ce qui est contradictoire. On conclut

$$\boxed{\text{Une solution non nulle de (H) admet un nombre fini de zéros sur tout segment de I.}}$$

9 Questions de cours

Calcul différentiel (début), développements en série entière usuels, graphes usuels.