Devoir en temps libre n°15

Problème I

Chercher les solutions développables en série entière puis résoudre complètement sur $]\,0\,;\pi\,[$ l'équation différentielle

$$tx'' + 2x' + tx = 0 \tag{H}$$

Problème II

On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire

$$x'' - x = |\cos(t)| \tag{L}$$

sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

1. Justifier que $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est un système fondamental de solutions de l'équation homogène (H) associée à (L).
2. Déterminer une écriture simple de $\operatorname{sh}(a-b)$ avec a, b réels ne faisant intervenir que sh et ch en a et b.
3. Établir que l'équation (L) admet des solutions positives.
4. Soit x une solution positive de (L).
   (a) Montrer que x n'est pas constante.
   (b) En déduire que x n'est pas bornée.
   On ne cherchera pas à déterminer une expression de x.

Problème III

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\pi_u = (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}-2)$.

1. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? On fournira un exemple de matrice triangulaire de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est π_u.
2. Montrer $$\mathrm{E} = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id})^2 \oplus \operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$$
3. On pose $p = (u - \mathrm{id})^2$ et $q = u \circ (2\,\mathrm{id} - u)$. Calculer $p + q$.
4. Montrer que p est la projection sur $\operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id})^2$.
   Que peut-on dire de q ?
5. Établir que $u^k \circ p = \alpha^k p$ pour k entier avec α un réel à préciser.
6. En déduire que $\mathrm{e}^u \circ p = \beta p$ avec β un réel à préciser.
7. Que vaut $(u - \mathrm{id})^k \circ q$ pour tout entier $k \geqslant 2$?
8. En utilisant l'égalité $u = \mathrm{id} + (u - \mathrm{id})$, montrer que $\mathrm{e}^u \circ q = \gamma u \circ q$ avec γ un réel à préciser.
9. Conclure en déterminant une expression de e^u polynomiale en u.

Problème IV (bonus)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique puis soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, B et X_0 dans E. Pour $u \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$, on considère le problème de Cauchy

$$(\mathrm{S}) : \begin{cases} \mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}u(t) \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0 \end{cases}$$

Pour X la solution de ce problème de Cauchy, on note $\Phi(u) = \mathrm{X}(1)$. On dit que le système (S) régi par le problème de Cauchy est *contrôlable* si l'application $\Phi : \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R}) \to \mathrm{E}$ est surjective. On pose

$$\forall u \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R}) \qquad \Psi(u) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}u(s)\,\mathrm{d}s$$

et
$$\mathrm{K} = \big(\mathrm{B}|\mathrm{AB}|\ldots|\mathrm{A}^{n-1}\mathrm{B}\big) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

1. Pour $u \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$, déterminer une expression de $\Phi(u)$.

2. Montrer $$\Phi \text{ surjective} \iff \Psi \text{ surjective}$$

3. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$. Montrer $$\mathrm{K}^\top\mathrm{X} = 0 \iff \forall k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!] \qquad \big\langle \mathrm{A}^k\mathrm{B}, \mathrm{X}\big\rangle = 0$$

4. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$. Justifier l'égalité $$\forall u \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R}) \qquad \langle \Psi(u), \mathrm{X}\rangle = \int_0^1 \big\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}, \mathrm{X}\big\rangle\, u(s)\,\mathrm{d}s$$

5. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$. Montrer $$\mathrm{K}^\top\mathrm{X} = 0 \implies \operatorname{Im}\Psi \subset \operatorname{Vect}(\mathrm{X})^\perp$$

   En déduire $\operatorname{rg}(\mathrm{K}) < n \implies$ le système (S) n'est pas contrôlable

6. On suppose Ψ non surjective.

   (a) Montrer qu'il existe $\mathrm{X} \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ tel que $\operatorname{Im}\Psi \subset \operatorname{Vect}(\mathrm{X})^\perp$.

   (b) En déduire $$\forall s \in [\,0\,;1\,] \qquad \big\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}, \mathrm{X}\big\rangle = 0$$

   puis $$\forall k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!] \qquad \big\langle \mathrm{A}^k\mathrm{B}, \mathrm{X}\big\rangle = 0$$

   (c) Établir le système (S) n'est pas contrôlable $\implies \operatorname{rg}(\mathrm{K}) < n$

7. Conclure en établissant la *condition de contrôlabilité de Kalman* :

$$\text{le système (S) est contrôlable} \iff \operatorname{rg}(\mathrm{K}) = n$$