Séance 5 - MP+ - 13/02/26

Exercice 1 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{A}_n)_n$ une suite d'événements. On note

$$\mathrm{A} = \text{« une infinité d'événements } \mathrm{A}_n \text{ est réalisée »}$$

1. Montrer que A est un événement.
2. Si la série $\sum \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)$ converge, montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 0$.
3. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes telles que $\sum \mathbb{P}(|\mathrm{X}_n| \geqslant \varepsilon)$ converge pour tout $\varepsilon > 0$.
   (a) Justifier que $\left\{\mathrm{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right\}$ est un événement.
   (b) Montrer $$\mathrm{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{p.s.}$$

Exercice 2 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes de même loi dans L^2. On note $m = \mathbb{E}(\mathrm{X}_1)$, $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(\mathrm{X}_1)}$ et on pose

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k - m$$

1. Montrer $$\mathrm{Y}_{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{p.s.}$$
2. On note $\varphi(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ pour n entier. Montrer $$\mathrm{Y}_n - \frac{\varphi(n)^2}{n}\mathrm{Y}_{\varphi(n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{p.s.}$$
3. Conclure $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(\mathrm{X}_1) \qquad \text{p.s.}$$

Exercice 3 (****)

On pose $$\forall x > 0 \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!\sqrt{k}}$$

1. Montrer $$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^x)$$
2. Pour $x > 0$ et Y_x variable aléatoire de loi $\mathscr{P}(x)$, montrer $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|\mathrm{Y}_x - x| \geqslant \varepsilon x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$
3. En déduire $$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$$

Exercice 4 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, Y une variable aléatoire réelle discrète centrée telle que $\mathrm{Y}(\Omega) \subset [\,\alpha\,;\beta\,]$, $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$.

1. Soit s réel. Montrer
$$\forall y \in [\,\alpha\,;\beta\,] \qquad \mathrm{e}^{sy} \leqslant \frac{\beta - y}{\beta - \alpha}\mathrm{e}^{s\alpha} + \frac{y-\alpha}{\beta-\alpha}\mathrm{e}^{s\beta}$$
En déduire
$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{s\mathrm{Y}}) \leqslant q\mathrm{e}^{s\alpha} + p\mathrm{e}^{s\beta}$$
avec
$$p = \frac{-\alpha}{\beta-\alpha} \quad \text{et} \quad q = \frac{\beta}{\beta-\alpha}$$

2. On pose
$$\forall s \in \mathbb{R} \qquad \psi(s) = s\alpha + \ln\left(q + p\mathrm{e}^{s(\beta-\alpha)}\right)$$
Justifier que la fonction ψ est deux fois dérivable puis établir
$$\forall s \in \mathbb{R} \qquad \psi''(s) = (\beta-\alpha)^2 \frac{qp\mathrm{e}^{s(\beta-\alpha)}}{\left(q + p\mathrm{e}^{s(\beta-\alpha)}\right)^2}$$

3. En déduire pour s réel
$$\psi''(s) \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}$$
puis
$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{s\mathrm{Y}}) \leqslant \exp\left(\frac{(\beta-\alpha)^2 s^2}{8}\right)$$

4. Soient $\varepsilon, s > 0$. Montrer
$$\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n) \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(-s\varepsilon + n\frac{(b-a)^2 s^2}{8}\right)$$
En déduire
$$\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n) \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{n(b-a)^2}\right)$$

Exercice 5 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes centrées dans L^2. On note $\mathrm{S}_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{X}_i$ pour $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose
$$\forall k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \mathrm{A}_k = \bigcap_{j=1}^{k-1} \{|\mathrm{S}_j| < \varepsilon\} \cap \{|\mathrm{S}_k| \geqslant \varepsilon\}$$

1. Justifier l'indépendance des variables aléatoires $\mathrm{S}_k \mathbb{1}_{\mathrm{A}_k}$ et $\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_k$ pour $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$.

2. Montrer
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathrm{S}_k^2 \mathbb{1}_{\mathrm{A}_k}\right) \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{S}_n^2)$$

3. En déduire
$$\mathbb{P}\left(\operatorname*{Max}_{k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]} |\mathrm{S}_k| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\mathrm{X}_i)$$

Exercice 6 (****)

1. Montrer que $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}_+$ d'une suite de fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{P}(x)\mathrm{e}^{-x}$ avec $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
2. On considère E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, continues et de limite nulle en $+\infty$. On munit E de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue à support compact. Soit $\lambda \geqslant 0$ et $(\mathrm{X}_k^{(\lambda)})_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Poisson de paramètre λ (on généralise pour $\lambda = 0$). Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ avec
$$\forall \lambda \geqslant 0 \qquad g_n(\lambda) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k^{(\lambda)}\right)\right)$$
converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $\{x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathrm{P}(x)\mathrm{e}^{-x}, \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]\}$ est dense dans E.

Exercice 7 (****)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables indépendantes de loi uniforme sur $[\![1\,;\, r]\!]$ avec $r \geqslant 1$ et $\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_r$ des variables indépendantes avec $\mathrm{Z}_1 = 1$ et $\mathrm{Z}_i \sim \mathscr{G}\left(\dfrac{r-i+1}{r}\right)$ pour tout $i \in [\![2\,;\, r]\!]$. On pose $\mathrm{C}_r = \sum\limits_{i=1}^{r} \mathrm{Z}_i$ puis, pour $i \in [\![1\,;\, r]\!]$
$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathrm{T}_i(\omega) = \inf\{n \geqslant 1 \mid \mathrm{Card}\,\{\mathrm{X}_1(\omega), \ldots, \mathrm{X}_n(\omega)\} = i\}$$
et $\mathrm{Y}_i = \mathrm{T}_i - \mathrm{T}_{i-1}$ avec la convention $\mathrm{T}_0 = 0$.

1. Préciser espérance et variance des variables Z_i.
2. Montrer que
$$\mathbb{E}(\mathrm{C}_r) = r \times \mathrm{H}_r \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\mathrm{C}_r) = -r\mathrm{H}_r + r^2\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{H}_r = \sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k}$$
3. Justifier $$\mathrm{H}_r \underset{r\to+\infty}{\sim} \ln r$$
4. Établir $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{C}_r}{r\ln r} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$$
5. Déterminer la loi de $(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_r)$.
6. En déduire $$\mathrm{T}_r \sim \mathrm{C}_r$$

Indications

Exercice 1 (***)

Indications : 1, 2. Déjà vu...
3.(a) Traduire $X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ avec des quantificateurs puis en déduire une écriture ensembliste. Observer que l'on peut remplacer $\bigcap_{\varepsilon>0}$ par une intersection dénombrable $\bigcap_{k\geqslant 1}$ en prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$.
3.(b) Utiliser le résultat de la deuxième question puis considérer une intersection dénombrable d'événements presque sûr.

Exercice 2 (***)

Indications : 1. Utiliser le résultat de l'exercice 1 et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. Déterminer la limite presque sûr de $\dfrac{\varphi(n)^2}{n} Y_{\varphi(n)^2}$ puis conclure.

Exercice 3 (****)

Indications : 1. Utiliser le théorème de double limite.
3. Considérer une fonction φ judicieusement choisie pour avoir $\mathbb{E}\left(\varphi\left(\dfrac{Y_x}{x}\right)\right) = e^{-x}\sqrt{x}f(x)$ et pouvoir contrôler l'écart $|1 - e^{-x}\sqrt{x}f(x)|$.

Exercice 4 (***)

Indications 1. Se souvenir que l'exponentielle est convexe.
3. Comparer $(u+v)^2$ et $4uv$ pour u et v réels puis écrire la formule de Taylor reste intégral pour la fonction ψ.
4. Utiliser la technique de Chernoff puis l'inégalité précédemment obtenue.

Exercice 5 (***)

Indications : 1. Détailler $S_n - S_k$ pour $k \in [\![1\,;\,n]\!]$.
2. Observer que les A_k sont incompatibles et en déduire un majorant simple pour $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$. Considérer ensuite $\sum_{k=1}^{n} S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}$ et écrire $S_n = S_k + S_n - S_k$.
3. Écrire $\left\{ \operatorname{Max}_{k\in[\![1\,;\,n]\!]} |S_k| \geqslant \varepsilon \right\}$ à l'aide des A_k.

Exercice 6 (****)

Indications : 1. Utiliser le développement en série entière de l'exponentielle puis l'inégalité de Taylor-Lagrange.
2. Reprendre la trame de la démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass. Notant M la borne supérieure du support de f, distinguer les cas $\lambda \leqslant 2\mathrm{M}$ et $\lambda > 2\mathrm{M}$.
3. Approcher $f \in \mathrm{E}$ par une fonction continue à support compact et utiliser le résultat précédent.

Exercice 7 (****)

Indications : 4. Pour $\varepsilon > 0$, utiliser l'inclusion

$$\left\{\left|\frac{\mathrm{C}_r}{r\ln r} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right\} \subset \left\{\left|\frac{\mathrm{C}_r}{r\ln r} - \frac{\mathrm{H}_r}{\ln r}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\left|\frac{\mathrm{H}_r}{\ln r} - 1\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

5. Pour $y_1 = 1$ et $(y_2, \ldots, y_r) \in (\mathbb{N}^*)^{r-1}$, poser $t_i = \sum\limits_{i=1}^{i} y_i$ pour $i \in [\![\, 1\,;\, r \,]\!]$ puis exprimer $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{r} \{\mathrm{Y}_i = y_i\}\right)$ en fonction des T_i puis des X_i en utilisant une partition portant sur les permutations de S_r avec $\sigma(k) = \mathrm{X}_{t_k}$ pour $k \in [\![\, 1\,;\, r \,]\!]$.