# Feuille d'exercices n°74

## Exercice 1 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit F sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad \mathrm{F}(x,y) = \frac{f(x^2+y^2) - f(0)}{x^2+y^2}$$

1. Montrer que F est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$.
   On note encore F ce prolongement.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

## Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{U} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathrm{U} \to \mathrm{E}$ définie par $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}^{-1}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{U}$.

1. Justifier que U est un ouvert de E.
2. Montrer que $f$ est différentiable et déterminer sa différentielle.
   On pourra commencer par une étude en $\mathrm{I}_n$.

## Exercice 3 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ définie par $f(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{M})$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$.

1. Justifier que $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E}, \mathbb{R})$.
2. Calculer $\mathrm{d}f(\mathrm{I}_n)$ puis $\mathrm{d}f(\mathrm{A})$ pour $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire $\mathrm{d}f(\mathrm{A})$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

## Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad xy \neq 1\}$. On pose

$$\forall (x,y) \in \mathrm{D} \qquad f(x,y) = \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, y - \mathrm{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

1. Justifier que D est un ouvert puis décrire ses composantes connexes par arcs.
2. Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{D}, \mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle.
3. En déduire une expression simple de $f$.

## Exercice 5 (***)

Soit U ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est *convexe*, si

$$\forall (x,y) \in \mathrm{U}^2 \qquad \forall \lambda \in [\,0\,;1\,] \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

On suppose $f$ différentiable sur U. Montrer

$$f \text{ convexe} \iff \forall (x,y) \in \mathrm{U}^2 \qquad f(y) \geqslant f(x) + \mathrm{d}f(x) \cdot (y-x)$$

## Exercice 6 (***)

Étudier la continuité, l'existence des dérivées partielles premières et le caractère $\mathscr{C}^1$ des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x^2)-\cos(y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

## Exercice 7 (***)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, u(x)\rangle$ est différentiable et préciser sa différentielle.

2. On pose
$$\Phi : \begin{cases} \mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \quad \longmapsto \dfrac{\langle x, u(x)\rangle}{\langle x, x\rangle} \end{cases}$$
Montrer que $\Phi$ est différentiable sur $\mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}$ et l'équivalence pour $a \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}$
$$\mathrm{d}\Phi(a) = 0 \iff a \text{ vecteur propre de } u$$

## Exercice 8 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note $\Delta = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$ et on pose
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \Delta \qquad \mathrm{F}(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$
Montrer que F se prolonge en fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

## Exercice 9 (***)

Soit E euclidien et $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E},\mathrm{E})$ telle que
$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|f(x)-f(y)\| \geqslant \|x-y\|$$

1. Montrer que $f$ est injective.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathrm{E}$, la différentielle $\mathrm{d}f(a)$ est injective puis bijective.
3. Soit $b \in \mathrm{E}$. On pose $g(x) = \|f(x)-b\|^2$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.
   (a) Justifier que $g$ atteint un minimum $m$ sur E.
   (b) Montrer que $g \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E},\mathbb{R})$ et déterminer $\mathrm{d}g(a)\cdot h$ pour $(a,h) \in \mathrm{E}^2$.
   (c) Conclure que $f$ est bijective. Que peut-on dire sur $f^{-1}$ ?

## Exercice 10 (****)

Soit E euclidien avec $\dim \mathrm{E} \geqslant 2$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E},\mathbb{R})$ telle que $\dfrac{|f(x)|}{\|x\|} \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que $\nabla f$ est surjective.