# Feuille d'exercices n°75

## Exercice 1 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On définit $\mathrm{F} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{F}(\mathrm{P}) = \int_0^1 f(t, \mathrm{P}(t))\,\mathrm{d}t$$

Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer sa différentielle.

**Indications :** Pour $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathrm{E}$, établir le caractère $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre $a_j \mapsto \int_0^1 f\left(t, \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k\right) \mathrm{d}t$ puis établir la continuité des dérivées partielles $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial a_j}$ pour $j \in [\![ 0\,; n ]\!]$.

## Exercice 2 (***)

On pose $\qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^3}{(x^4 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Étudier la continuité puis le caractère $\mathscr{C}^1$ de $f$.

**Indications :** Utiliser l'inégalité $(x^2 - |y|)^2 \geqslant 0$ pour la continuité puis considérer une direction particulier pour une dérivée partielle.

## Exercice 3 (***)

On munit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme vérifiant $\|\mathrm{I}_n\| = 1$ et $\|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$ pour $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$.

1. Montrer $\qquad \forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{B}} - \mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{t\mathrm{B}} (\mathrm{B} - \mathrm{A}) \mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}\,\mathrm{d}t$

2. Soit $\mathrm{R} > 0$. Montrer

$$\forall (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})^2 \qquad \|\mathrm{e}^{\mathrm{X}} - \mathrm{e}^{\mathrm{Y}}\| \leqslant \mathrm{e}^{\mathrm{R}} \|\mathrm{X} - \mathrm{Y}\|$$

3. En déduire que l'exponentielle est différentiable sur E avec

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{H}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \mathrm{d}\exp(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{H} = \int_0^1 \mathrm{e}^{t\mathrm{A}} \mathrm{H} \mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}\,\mathrm{d}t$$

**Indications :** 1. Reconnaître une dérivée sous l'intégrale.
2. Utiliser l'égalité de la question précédente.
3. Pour $(\mathrm{A}, \mathrm{H}) \in \mathrm{E}^2$, considérer $\mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{H}} - \mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{t\mathrm{A}} \mathrm{H} \mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}\,\mathrm{d}t$ et contrôler cette quantité.

## Exercice 4 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_x^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}* \times \mathbb{R} \\ f(0)(y-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Indications :** Poser une fonction d'une variable puis utiliser le théorème de Taylor-Young afin de vérifier le théorème de limite de la dérivée.

## Exercice 5 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \int_0^x f(x, t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminer $g'(x)$ pour $x$ réel.

**Indications :** Avec un changement de variable, transformer l'écriture de $g$ de sorte que les bornes de l'intégrale soient constantes.

## Exercice 6 (****)

Soit $n$ entier non nul et $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad f(\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) & \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^2) & \dots & \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^n) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $f$ est différentiable et déterminer $\mathrm{d}f(\mathrm{M})$ pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Comparer le rang de $\mathrm{d}f(\mathrm{M})$ et le degré du polynôme minimal $\pi_{\mathrm{M}}$.
3. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est de degré $n$ est une partie ouverte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

**Indications :** 1. Notant $\varphi_k : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^k)$, déterminer le développement limité de $\varphi_k(\mathrm{M} + \mathrm{H})$.
2. Notant $\psi_k : \mathrm{H} \mapsto (k+1)\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^k \mathrm{H})$, comparer pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ les quantités $\mathrm{rg}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M})$ avec $\dim \mathrm{Vect}\,(\psi_0, \dots, \psi_{n-1})$. Utiliser ensuite le fait que $\mathbb{R}[\mathrm{M}] = \mathbb{R}_{m-1}[\mathrm{M}]$ avec $m = \deg \pi_{\mathrm{M}}$.
3. Notant $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ les bases canoniques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$, considérer $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ des plages d'indices d'une matrice extraite de $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2} \mathrm{d}f(\mathrm{A})$ bien choisie avec $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\deg \pi_{\mathrm{A}} = n$.