Feuille d'exercices n°67

Exercice 1 (*)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x + y) = f(x)f(y)$$

Corrigé : On a $f(0) = f(0)^2$ d'où $f(0) \in \{0, 1\}$. Si $f(0) = 0$, alors $f(x) = f(x)f(0) = 0$ pour tout x réel. Supposons $f(0) = 1$. On fixe x réel et on dérive en y. On trouve

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f'(x + y) = f'(x)f(y)$$

Choisissant $x = 0$, il vient

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad f'(y) = f'(0)f(y)$$

d'où
$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad f(y) = \mathrm{e}^{f'(0)y}$$

Réciproquement, de telles fonctions sont solutions d'où

$$\boxed{\mathrm{S} = \{x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{x \mapsto 0\}}$$

Exercice 2 (**)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) + f(-x) = x$$

On pourra considérer la partie paire et impaire de ces fonctions.

Corrigé : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) + f(-x) = x \tag{E}$$

Par analyse/synthèse, on montre que f se décompose de manière unique en la somme $f = g + h$ avec $g : x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, respectivement partie paire et impaire de la fonction f qui sont aussi deux fois dérivables. En substituant x par $-x$ dans l'équation (E) puis en faisant la somme et la différence des deux relations, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g''(x) + g(x) = 0 \quad \text{et} \quad h''(x) - h(x) = x$$

Sachant que g est paire et h impaire, il existe α, β réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \alpha \cos(x) \quad \text{et} \quad h(x) = \beta \,\mathrm{sh}\,(x) - x$$

Si f est solution, elle est donc de la forme $f : x \mapsto \alpha \cos(x) + \beta \,\mathrm{sh}\,(x) - x$ avec α, β réels. La réciproque est immédiate. On conclut

$$\boxed{\text{Les solutions sont les fonctions de la forme } x \mapsto \alpha \cos(x) + \beta \,\mathrm{sh}\,(x) - x \text{ avec } \alpha,\ \beta \text{ réels.}}$$

Exercice 3 (**)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos(x) - \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : Soit f solution. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos(x) - x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Il s'ensuit que f est dérivable et par dérivation

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = -\sin(x) - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - xf(x) + xf(x)$$

On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour x réel. D'après le théorème fondamental d'analyse, on a F de classe $\mathscr{C}^1$ avec $\mathrm{F}' = f$ et donc F deux fois dérivable. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}''(x) + \mathrm{F}(x) = -\sin(x)$$

D'où $\qquad \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{2} + \alpha\sin(x) + \beta\cos(x)$

et après dérivation

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = -\frac{x\sin(x)}{2} + \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$$

et $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = -\dfrac{\sin(x) + x\cos(x)}{2} - \lambda\sin(x) + \mu\cos(x)$

D'où $\qquad \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 0 \end{cases}$

Nécessairement $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos(x) - \dfrac{x\sin(x)}{2}$

Réciproquement, on injecte cette expression de f dans l'équation (E) et le calcul montre que l'égalité a lieu. Ainsi

$$\boxed{\text{L'équation (E) admet pour unique solution } x \mapsto \cos(x) - \frac{x\sin(x)}{2}.}$$

Exercice 4 (**)

Résoudre sur $\mathrm{I} =]\,0\,; +\infty\,[$ l'équation différentielle

$$x' + \frac{2}{t}x = \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{E}$$

Corrigé : Il ne s'agit pas d'une équation linéaire. Si x est solution, elle est nécessairement à valeurs dans $]\,0\,; +\infty\,[$. On a

$$x' + \frac{2}{t}x = \frac{1}{\sqrt{x}} \iff x'\sqrt{x} + \frac{2}{t}x^{\frac{3}{2}} = 1$$

On pose $u = x^{\frac{3}{2}}$. Par dérivation, il vient $u' = \dfrac{3}{2}x'\sqrt{x}$ d'où

$$(\mathrm{E}) \iff \frac{2}{3}u' + \frac{2}{t}u = 1$$

équation différentielle linéaire avec second membre. Après résolution, on trouve

$$(\mathrm{E}) \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad | \quad \forall t \in \mathrm{I} \qquad u(t) = \frac{3}{8}t + \frac{\alpha}{t^3} = \frac{3t^4 + 8\alpha}{8t^3}$$

Si $\alpha \geqslant 0$, alors u est à valeurs dans $]\,0\,;+\infty\,[$ sur I. Si $\alpha < 0$, la fonction u prend des valeurs dans $]\,-\infty\,;0\,[$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{S_E} = \left\{ t \in \mathrm{I} \mapsto \left(\frac{3}{8}t + \frac{\alpha}{t^3} \right)^{\frac{2}{3}}, \alpha \geqslant 0 \right\}}$$

Remarque : Il s'agit d'une d'*équation de Bernoulli.*

Exercice 5 (**)

Chercher les solutions développables en série entière puis résoudre complètement les équations différentielles linéaires suivantes :

1. $(t^2+t)x''+(3t+1)x'+x = 0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$
2. $tx'' + 3x' - 4t^3x = 0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

Corrigé : 1. On note (H) l'équation différentielle homogène. Supposons qu'il existe une solution de (H) développable en série entière $x(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ pour $t \in]\,-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$ avec $\mathrm{R} > 0$. Par dérivation d'une série entière, il vient

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \qquad x'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \qquad x''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

On injecte ces expressions dans (H) et on distribue les produits :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

On procède au changement d'indice pour avoir des sommes en t^n qui est majoritaire et on peut faire démarrer toutes les sommes à $n = 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 3n a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

Par linéarité du symbole somme car convergence, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)^2 \left(a_n + a_{n+1}\right) t^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+1} = -a_n$$

La suite $(a_n)_n$ est géométrique de raison -1 d'où $a_n = (-1)^n a_0$ pour n entier et le rayon de convergence de la série entière usuelle $\sum (-1)^n t^n$ est $\mathrm{R} = 1$. Ainsi, l'ensemble des solutions développables en séries entières de (H) est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}\,(\varphi)$ avec

$$\forall t \in]\,-1\,;1\,[\qquad \varphi(t) = \frac{1}{1+t}$$

On se place ensuite sur $\mathrm{I} =]\,0\,;+\infty\,[$. On note abusivement $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ et on vérifie sans difficulté que φ est solution de (H) sur I. Sur l'intervalle I, l'équation peut se mettre sous forme résolue et l'ensemble des solutions est donc un plan vectoriel. Si ψ est solution de (H), considérant le wronskien W, on a

$$\varphi\psi' - \varphi'\psi = \mathrm{W} \tag{L}$$

On sait que le wronskien vérifie l'équation différentielle $\mathrm{W}' = -\dfrac{3t+1}{t(t+1)}\mathrm{W}$. On a la décomposition en éléments simples

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \frac{3t+1}{t(t+1)} = \frac{2t+t+1}{t(t+1)} = \frac{2}{t+1} + \frac{1}{t}$$

d'où

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{W}(t) = \frac{\alpha}{t(t+1)^2} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

On considère désormais l'équation (L) comme une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre. La droite $\mathrm{Vect}\,(\varphi)$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée et par variation de la constante, avec λ dérivable sur I et $\psi = \lambda\varphi$, il vient pour tout $t \in \mathrm{I}$

$$\varphi^2(t)\lambda'(t) = \frac{\alpha}{t(t+1)^2} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

d'où

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \lambda'(t) = \int \frac{\alpha}{t}\,\mathrm{d}t + \beta = \alpha\ln(t) + \beta$$

avec α, β réels. On conclut

$$\boxed{\mathrm{S_H} = \left\{t \in \mathrm{I} \mapsto \frac{\alpha\ln(t)+\beta}{1+t},\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

2. On note (H) l'équation différentielle homogène. Supposons qu'il existe une solution de (H) développable en série entière $x(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ pour $t \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$ avec $\mathrm{R} > 0$. Par dérivation d'une série entière, il vient

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \qquad x'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \qquad x''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}$$

On injecte ces expressions dans (H) :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+3} = 0$$

Dans la dernière somme, on procède au changement d'indice $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+3} = \sum\limits_{n=4}^{+\infty} a_{n-4} t^{n-1}$. Par linéarité du symbole somme car convergence, on obtient

$$3a_1 + 8a_2 t + 15a_3 t^2 + \sum_{n=4}^{+\infty} \left[n(n+2)a_n - 4a_{n-4}\right] t^{n-1} = 0$$

Par unicité du développement en série entière, il vient $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n(n+2)a_n - 4a_{n-4} = 0 \iff a_n = \frac{4}{(n+2)n} a_{n-4}$$

Par récurrence immédiate, on trouve $a_{4n+1} = a_{4n+2} = a_{4n+3} = 0$ pour n entier et si $a_0 \neq 0$, alors $a_{4n} \neq 0$ pour n entier. Un produit téléscopique donne pour n entier

$$a_{4n} = a_0 \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{a_{4k}}{a_{4(k-1)}}\right) = a_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{4}{(4k+2)(4k)} = a_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k)} = \frac{a_0}{(2n+1)!}$$

Posons $\varphi(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^{4n}}{(2n+1)!}$. Pour $r > 0$, notant $u_n = \dfrac{r^{4n}}{(2n+1)!}$, il vient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r^4}{(2n+3)(2n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

D'après le critère de d'Alembert, on en déduit $\mathrm{R} = +\infty$. Puis

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad t^2\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh}(t^2)$$

Ainsi, l'ensemble des solutions développables en séries entières de (H) est la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(\varphi)$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}(t^2)}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On se place ensuite sur $\mathrm{I} =]\,0\,; +\infty\,[$. Sur l'intervalle I, l'équation peut se mettre sous forme résolue et l'ensemble des solutions est donc un plan vectoriel. Si ψ est solution de (H), considérant le wronskien W, on a

$$\varphi\psi' - \varphi'\psi = \mathrm{W} \tag{L}$$

On sait que le wronskien vérifie l'équation différentielle $\mathrm{W}' = -\dfrac{3}{t}\mathrm{W}$ autrement dit

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{W}(t) = \frac{\alpha}{t^3} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

On considère désormais l'équation (L) comme une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en ψ avec second membre. La droite $\operatorname{Vect}(\varphi)$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée et par variation de la constante, avec λ dérivable sur I et $\psi = \lambda\varphi$, il vient pour tout $t \in \mathrm{I}$

$$\varphi^2(t)\lambda'(t) = \frac{\alpha}{t^3} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

d'où
$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \lambda'(t) = \int \frac{\alpha t}{\operatorname{sh}(t^2)}\,\mathrm{d}t + \beta = -\frac{\alpha}{2}\frac{\operatorname{ch}(t^2)}{\operatorname{sh}(t^2)} + \beta$$

avec α, β réels. Notant $\lambda = -\dfrac{\alpha}{2}$, on conclut

$$\boxed{\mathrm{S_H} = \left\{t \in \mathrm{I} \mapsto \alpha\frac{\operatorname{sh}(t^2)}{t^2} + \beta\frac{\operatorname{ch}(t^2)}{t^2},\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

Remarque : La forme de la deuxième dimension ressemble à la première. On aurait pu la conjecturer, la vérifier et montrer la liberté de la famille des fonctions concernées.

Exercice 6 (**)

On pose
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \sin\left[\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right]$$

1. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2
$$(1+t^2)x'' + tx' + x = 0$$

2. En déduire que f est développable en série entière en zéro et préciser son développement.

Corrigé : 1. On a $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\left[\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right] = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

puis $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f'(t) = \frac{\cos\left[\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right]}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$f''(t) = -\frac{t\cos\left[\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right]}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} - \frac{\sin\left[\ln(1+\sqrt{1+t^2})\right]}{1+t^2}$$

Ainsi $$\boxed{(1+t^2)f''+tf'+f=0}$$

2. D'après le résultat de la question précédente, la fonction f est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases}(1+t^2)x''+tx'+x=0\\ (x(0),x'(0))=(0,1)\end{cases}$$

Cherchons une solution développable en série entière. On pose $x(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ pour $t \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$ avec $\mathrm{R} > 0$. Par dérivation de séries entières, on obtient

$$(1+t^2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + t\sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

d'où $$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

Après changement d'indice et démarrage des sommes à $n=0$, on trouve

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} na_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

Par linéarité car convergence, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2+1)a_n\right]t^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2+1)a_n = 0$$

Les conditions initiales donnent $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. Par récurrence immédiate, on a $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} \neq 0$ pour tout n entier. Avec un produit téléscopique, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{2n+1} = a_1\prod_{k=1}^{n}\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = \prod_{k=1}^{n} -\frac{(2k-1)^2+1}{(2k+1)(2k)} = (-1)^n\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left[(2k-1)^2+1\right]}{(2n+1)!}$$

Ainsi $$\forall t \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[\qquad x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left[(2k-1)^2+1\right]}{(2n+1)!}t^{2n+1}$$

Enfin pour $r > 0$, on pose $u_n = |a_{2n+1}|\, r^{2n+1}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)^2+1}{(2n+3)(2n+2)}r^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4n^2}{4n^2}r^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} r^2$$

D'après le critère de d'Alembert, la série converge absolument pour $r > 1$ et diverge grossièrement pour $r < 1$. On en déduit respectivement $\mathrm{R} \leqslant 1$ et $\mathrm{R} \geqslant 1$ d'où $\mathrm{R} = 1$. D'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, on conclut

$$\boxed{\forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad \sin\left[\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left[(2k-1)^2+1\right]}{(2n+1)!} t^{2n+1}}$$

Exercice 7 (*)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire

$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^2} \tag{L}$$

Corrigé : Soit (L) l'équation avec second membre et (H) son équation homogène associée. On a

$$\mathrm{S_H} = \mathrm{Vect}\,(\varphi, \psi) \quad \text{avec} \quad \varphi : t \mapsto \mathrm{e}^t \quad \psi : t \mapsto t\mathrm{e}^t$$

On procède ensuite par variation de la constante. Soient $\lambda, \mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $y = \lambda\varphi + \mu\psi$ et vérifiant pour tout t réel de

$$\begin{cases} \lambda'(t)\mathrm{e}^t + \mu'(t)t\mathrm{e}^t = 0 \\ \lambda'(t)\mathrm{e}^t + \mu'(t)(1+t)\mathrm{e}^t = \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^2} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \overline{1+t^2} \end{pmatrix}$$

Par suite, pour t réel

$$\lambda(t) = \alpha - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) \quad \text{et} \quad \mu(t) = \beta + \mathrm{Arctan}\, t$$

avec α, β réels. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{S_L} = \left\{t \mapsto -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t\,\mathrm{Arctan}\, t + (\alpha+\beta t)\mathrm{e}^t, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

Exercice 8 (*)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire

$$(t^2+1)^2 x'' + 2t(t^2+1)x' + x = \mathrm{e}^{\mathrm{Arctan}\,(t)} \tag{L}$$

avec le changement de variable $t = \tan(u)$.

Corrigé : On pose $y(u) = x(\tan(u))$ avec $u \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Par dérivation, on trouve

$$y'(u) = (1+\tan(u)^2)x'(\tan(u))$$

et $$y''(u) = (1+\tan(u)^2)^2 x''(\tan(u)) + 2\tan(u)(1+\tan(u)^2)x'(\tan(u))$$

d'où $$x \in \mathrm{S_L} \iff y'' + y = \mathrm{e}^u \iff y(u) = \alpha\cos(u) + \beta\sin(u) + \frac{\mathrm{e}^u}{2}$$

En observant

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \frac{\sin(\mathrm{Arctan}\,(t))}{\cos(\mathrm{Arctan}\,(t))} = \tan(\mathrm{Arctan}\,(t)) = t \quad \text{et} \quad \sin(\mathrm{Arctan}\,(t))^2 + \cos(\mathrm{Arctan}\,(t))^2 = 1$$

et comme $\cos(\mathrm{Arctan}\,(t)) \geqslant 0$ puisque $\mathrm{Arctan}\,(t) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ pour t réel, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \cos(\mathrm{Arctan}\,(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \sin(\mathrm{Arctan}\,(t)) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{S_L} = \left\{ t \mapsto \frac{\alpha}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{\beta t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{Arctan}\,(t)}}{2} \right\}}$$

Exercice 9 (*)

Résoudre sur $]\,0\,;\pi\,[$ l'équation différentielle linéaire

$$y'' + y = \frac{1}{\sin(t)} \tag{L}$$

Corrigé : Sans difficulté, la famille $(\sin, \cos)$ est un système fondamental de solutions. On procède par variation de la constante. Soient $\varphi, \psi\ :\ ]\,0\,;\pi\,[\ \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $y = \lambda \sin + \mu \cos$ et vérifiant pour tout $t \in\ ]\,0\,;\pi\,[$

$$\begin{cases} \lambda'(t)\sin(t) + \mu'(t)\cos(t) = 0 \\ \lambda'(t)\cos(t) - \mu'(t)\sin(t) = \dfrac{1}{\sin(t)} \end{cases} \iff \mathrm{R}(-t)\begin{pmatrix}\mu'(t)\\ \lambda'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\sin(t)}\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}\mu'(t)\\ \lambda'(t)\end{pmatrix} = \mathrm{R}(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\sin(t)}\end{pmatrix} \iff \begin{cases} \mu'(t) = -1 \\ \lambda'(t) = \dfrac{\cos(t)}{\sin(t)} \end{cases}$$

Ainsi $$\forall t \in\ ]\,0\,;\pi\,[\qquad \lambda(t) = \alpha + \ln(|\sin(t)|) \quad \text{et} \quad \mu(t) = \beta - t$$

L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\{t \in\ ]\,0\,;\pi\,[\ \mapsto \alpha\sin(t) + \beta\cos(t) + \sin(t)\ln(\sin(t)) - t\cos(t), (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}}$$

Exercice 10 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $\quad f'' + f \geqslant 0$. Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$$

Corrigé : Considérons l'équation $y'' + y = g$. On trouve après variation de la constante

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) &= \alpha\sin(t) + \beta\cos(t) + \int_0^t g(s)\,[\sin(t)\cos(s) - \cos(t)\sin(s)]\ \mathrm{d}s \\ &= \alpha\sin(t) + \beta\cos(t) + \int_0^t g(s)\sin(t-s)\ \mathrm{d}s \end{aligned}$$

avec α, β réels. Puis

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) + y(t+\pi) &= \int_0^t g(s)\sin(t-s)\ \mathrm{d}s + \int_0^{t+\pi} g(s)\sin(t-s+\pi)\ \mathrm{d}s \\ &= \int_0^t g(s)\sin(t-s)\ \mathrm{d}s - \int_0^{t+\pi} g(s)\sin(t-s)\ \mathrm{d}s \\ y(t) + y(t+\pi) &= \int_t^{t+\pi} \underbrace{g(s)\sin(s-t)}_{\geqslant 0}\ \mathrm{d}s \end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0}$$

Exercice 11 (**)

Soit y solution de $y'' + a(t)y = 0$ avec $a \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},]\,0\,;+\infty\,[)$. Montrer que y s'annule au moins une fois.

Corrigé : Supposons que y ne s'annule pas. Comme y est continue, elle est de signe constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Supposons par exemple $y > 0$. On aurait alors $y'' < 0$ d'où y concave. Le graphe de y est situé sous ses tangentes. Or, comme y n'est pas constante, son graphe admet des tangentes non horizontales et il s'ensuit que que y prend nécessairement des valeurs négatives ce qui est impossible par hypothèse. En effet, considérons α réel tel que $y'(\alpha) \neq 0$, par exemple $y'(\alpha) > 0$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) \leqslant y'(\alpha)(t-\alpha) + y(\alpha)$$

et faisant tendre $t \to -\infty$, on constate que y prend des valeurs négatives. On procède de même si $y'(\alpha) < 0$. On conclut

$$\boxed{\text{Une solution } y \text{ s'annule au moins une fois.}}$$

Exercice 12 (**)

On considère l'équation différentielle

$$y'' + q(t)y = 0 \tag{H}$$

où q est une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Soit y une solution bornée de (H). Étudier le comportement de y' en $+\infty$.
2. Montrer que (H) admet des solutions non bornées.

Corrigé : 1. On a $y'' = \mathrm{O}(q)$ d'où y'' intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Comme $y'(t) = y'(0) + \displaystyle\int_0^t y''(s)\,\mathrm{d}s$ pour $t \geqslant 0$, on en déduit que $y'(t)$ admet une limite finie ℓ pour $t \to +\infty$. Supposons $\ell \neq 0$ par exemple $\ell > 0$. On dispose de $\mathrm{A} \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \geqslant \mathrm{A} \qquad y'(t) \geqslant \frac{\ell}{2}$$

Par suite $\qquad \forall t \geqslant \mathrm{A} \qquad y(t) = y(\mathrm{A}) + \displaystyle\int_{\mathrm{A}}^t y'(s)\,\mathrm{d}s \geqslant y(\mathrm{A}) + \frac{\ell}{2}(t-\mathrm{A}) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$

ce qui contredit le caractère borné de y. Si $\ell < 0$, on se ramène à la configuration précédente en considérant $-y$. On a donc établi

$$\boxed{\text{Si } y \text{ est une solution bornée de (H), alors } y'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.}$$

2. Soit (u, v) une base de solutions bornées de (H) sur $\mathbb{R}_+$ et notons $\mathrm{W} = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$ le wronskien de ces solutions. Le wronskien est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$\mathrm{W}' = 0 \times \mathrm{W} = 0$$

Par suite, le wronskien est constant sur $\mathbb{R}_+$. Or, d'après le résultat de la première question, les fonctions u' et v' sont de limite nulle en $+\infty$ d'où

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \mathrm{W}(t) = u(t)v'(t) - u'(t)v(t) = \mathrm{O}(1)v'(t) + \mathrm{O}(1)u'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Le wronskien étant constant, cela signifierait qu'il est identiquement nul ce qui est absurde puisque le wronskien d'un système fondamental de solutions ne s'annule pas. Ainsi

$$\boxed{\text{L'équation (H) admet des solutions non bornées.}}$$

Exercice 13 (**)

Soit $p \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et x solution non nulle de l'équation différentielle

$$x'' - p(t)x = 0$$

On note $\mathcal{I} = \{t \in [\,0\,;1\,] \mid x(t) = 0\}$. Montrer que $\mathcal{I}$ est fini.

Corrigé : Supposons que $\mathcal{I}$ soit infini. Il existe donc une suite $(\alpha_n)_n$ de réels deux à deux distincts à valeurs dans $\mathcal{I}$ et donc dans $[\,0\,;1\,]$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ telle

$$\alpha_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \in \mathcal{I}$$

Quitte à extraire de nouveau, on peut supposer $\alpha_{\varphi(n)} \neq \alpha$ pour tout n entier. Par continuité de x, on a $x(\alpha) = 0$ puis, par dérivabilité de x en α

$$\frac{x(\alpha_{\varphi(n)}) - x(\alpha)}{\alpha_{\varphi(n)} - \alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} x'(\alpha)$$

Or, on sait $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \dfrac{x(\alpha_{\varphi(n)}) - x(\alpha)}{\alpha_{\varphi(n)} - \alpha} = 0$

Ainsi, la solution x vérifie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'' - p(t)x = 0 \\ x(\alpha) = x'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Or, la fonction nulle est solution et d'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, on en déduit la nullité de x ce qui est faux. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{I} \text{ est fini.}}$$