ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°68

Exercice 1 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et un complexe α avec $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$ tel que

$$f'(x) + \alpha f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Montrer
$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Corrigé : Par variation de la constante, on a pour t_0 réel

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\mathrm{e}^{\alpha t_0} f(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\alpha s} g(s)\,\mathrm{d}s\right]$$

avec $g = f' + \alpha f$. Pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver t_0 réel tel que

$$\forall s \geqslant t_0 \qquad |g(s)| \leqslant \varepsilon$$

Il s'ensuit

$$\forall t \geqslant t_0 \qquad |f(t)| \leqslant |\mathrm{e}^{\alpha t_0} f(t_0)|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\,(\alpha) t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\,(\alpha) t} \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}\,(\alpha)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\alpha) s}\right]_{t_0}^{t} \leqslant \mathrm{o}(1) + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}\,(\alpha)}$$

Ainsi
$$\boxed{f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0}$$

Variante : On choisit $t_0 = 0$. On a

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)} g(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha u} g(t-u) \mathbb{1}_{[0\,;t]}(u)\,\mathrm{d}u$$

et on conclut par convergence dominée.

Exercice 2 (**)

Soit $f : \left]0\,;+\infty\right[\to \mathbb{R}$ dérivable telles que

$$\forall t > 0 \qquad f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \tag{E}$$

Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, utiliser le changement de variables $t = \mathrm{e}^u$ puis déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Corrigé : Si f est solution, alors f' est dérivable comme composée de telles fonctions et par dérivation on trouve

$$\forall t > 0 \qquad f''(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)$$

En substituant t par $1/t$ pour $t > 0$ dans l'équation (E), on trouve que f est solution sur $\left]0\,;+\infty\right[$ de

$$t^2 x'' + x = 0$$

Avec le changement de variables $t = \mathrm{e}^u$ pour u réel, posant $y(u) = x(\mathrm{e}^u)$, on a par dérivation

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad y'(u) = \mathrm{e}^u x'(\mathrm{e}^u) \qquad y''(u) = \mathrm{e}^{2u} x''(\mathrm{e}^u) + \mathrm{e}^u x'(\mathrm{e}^u)$$

d'où $$t^2x'' + x = 0 \iff y'' - y' + y = 0$$

L'équation caractéristique $r^2 - r + 1 = 0$ admet pour solutions les complexes conjugués $\dfrac{1}{2} \pm \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et par conséquent

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad y(u) = \mathrm{e}^{\frac{u}{2}}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}u}{2}\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}u}{2}\right)\right) \quad \text{avec} \quad \lambda,\ \mu \text{ réels}$$

On remplace u par $\ln t$ puis on injecte la forme obtenue dans (E) et il vient $\lambda = \mu\sqrt{3}$. On conclut

$$\boxed{\forall t > 0 \qquad f(t) = \alpha\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln t}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{avec} \quad \alpha \text{ réel}}$$

Exercice 3 (***)

Soit $q : [\,0\,;+\infty\,[\, \to \,]\,0\,;+\infty\,[$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $q'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$. Montrer que toute solution de $y'' + q(x)y = 0$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Corrigé : On pose $z = y^2 + \dfrac{y'^2}{q}$. La fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$z' = 2yy' + \frac{2y'y''q - y'^2q'}{q^2} = \frac{2y'(y'' + qy) - y'^2q'}{q^2} = -\frac{y'^2q'}{q^2} \leqslant 0$$

Ainsi, la fonction z est positive, décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc bornée et il en résulte que y aussi.

Ainsi $$\boxed{\text{Toute solution de } y'' + q(x)y = 0 \text{ est bornée.}}$$

Remarque : Comment penser à introduire une telle fonction auxiliaire ? Considérons le cas simple d'un oscillateur harmonique $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega > 0$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad y(x) = \mathrm{A}\cos(\omega x + \varphi) \quad \text{avec} \quad (\mathrm{A}, \varphi) \in \mathbb{R}^2$$

Ainsi $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad y^2(x) + \frac{y'^2(x)}{\omega^2} = \mathrm{A}^2\left[\cos^2(\omega x + \varphi) + \sin^2(\omega x + \varphi)\right] = \mathrm{A}^2$$

L'amplitude de la fonction est donc déterminée par $y^2 + \dfrac{y'^2}{\omega^2}$. On adapte alors cette idée au cas général.

Variante : En multipliant l'équation par $2y'$, il vient $2y'y'' = -2qyy'$ et après intégration

$$\forall x \geqslant 0 \qquad y'^2(x) - y'^2(0) = -\int_0^x q(t)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t$$

En intégrant par parties, on trouve pour $x \geqslant 0$

$$y'^2(x) - y'^2(0) = [-q(t)y^2(t)]_0^x + \int_0^x q'(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$q(x)y^2(x) = \mathrm{A} - y'^2(x) + \int_0^x q'(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{A} + \int_0^x \frac{q'(t)}{q(t)}q(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} = q(0)y^2(0) + y'^2(0)$$

Par application du lemme de Gronwall appliqué avec $x \mapsto q(x)y^2(x)$, on obtient

$$\forall x \geqslant 0 \qquad q(x)y^2(x) \leqslant \mathrm{A}\exp\left(\int_0^x \frac{q'(t)}{q(t)}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{A}\frac{q(x)}{q(0)}$$

d'où $$\forall x \geqslant 0 \qquad y^2(x) \leqslant \frac{\mathrm{A}}{q(0)} = y^2(0) + \frac{y'^2(0)}{q(0)}$$

On en déduit que y^2 est bornée et donc y également. Le majorant obtenu est exactement la valeur de la fonction auxiliaire de la méthode initiale évaluée en 0.

Exercice 4 (***)

Soient p, q dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ avec I intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad \text{(H)}$$

1. Montrer qu'une solution non nulle de (H) admet un nombre fini de zéros sur tout segment de I.
2. Soit (f, g) une base de solutions de (H) et $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs de f. Montrer que g admet un un unique zéro dans $]\,\alpha\,;\beta\,[$.

Corrigé : 1. Soit y solution non nulle de (H) et $[\,a\,;b\,] \subset \mathrm{I}$. Supposons qu'il existe une suite $(\alpha_n)_n$ d'éléments deux à deux distincts de $[\,a\,;b\,]$ qui soient des zéros de y. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ telle que $\alpha_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \in [\,a\,;b\,]$. Par continuité, on a

$$0 = y(\alpha_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} y(\alpha) = 0$$

Quitte à ré-extraire, on suppose $\alpha_{\varphi(n)} \neq \alpha$ pour n entier. Par dérivabilité en α, il vient

$$0 = \frac{y(\alpha_{\varphi(n)}) - y(\alpha)}{\alpha_{\varphi(n)} - \alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} y'(\alpha)$$

La fonction y est donc solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \\ y(\alpha) = y'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Comme la fonction nulle en est solution, il s'ensuit que y est nulle d'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, ce qui est contradictoire. On conclut

$$\boxed{\text{Une solution non nulle de (H) admet un nombre fini de zéros sur tout segment de I.}}$$

2. Soient $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs de f. Notons $\mathrm{W}(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$ pour $t \in \mathrm{I}$ le wronskien du système (f, g). Comme il s'agit d'un système fondamental de solutions, on sait que le wronskien ne s'annule pas sur I. Supposons que g ne s'annule pas sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$. Le wronskien ne s'annule pas en particulier en α et β ce qui prouve que g ne s'annule pas sur le segment $\mathrm{J} = [\,\alpha\,;\beta\,]$. Considérons la fonction φ définie sur J par $\varphi = f/g$. Par dérivation, on trouve $\varphi' = -\mathrm{W}/g^2$ et comme $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$, le théorème de Rolle garantit l'annulation de φ' et donc de W sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$ ce qui est exclu.
Par conséquent, la fonction g s'annule sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$. En supposant que celle-ci admet au moins deux zéros sur cet intervalle, on pourrait alors établir par le même raisonnement que ci-avant que la fonction f s'annule entre les zéros de g ce qui contredirait le caractère consécutif de α et β. Ainsi

$$\boxed{\text{Entre deux zéros consécutifs de } f \text{ existe un unique zéro de } g.}$$

Remarque : Ce résultat est intitulé *théorème d'entrelacement de Sturm.*

Variantes : On peut éviter d'introduire la fonction auxiliaire φ. La fonction f est continue et ne s'annule pas sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$ donc est de signe constant sur cet intervalle et de même pour la fonction g par hypothèse. Supposons par exemple $f(t) > 0$ pour $t \in\,]\,\alpha\,;\beta\,[$. Faisant tendre $t \to \alpha$ et $t \to \beta$ dans les inégalités

$$\forall t \in\,]\,\alpha\,;\beta\,[\qquad \frac{f(t)-f(\alpha)}{t-\alpha} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(t)-f(\beta)}{t-\beta} \leqslant 0$$

Il vient
$$f'(\alpha) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f'(\beta) \leqslant 0$$

Si $f'(\alpha) = 0$, alors f est solution du problème de Cauchy formée de (H) et de $y(\alpha) = y'(\alpha) = 0$ dont la fonction nulle est solution. D'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, on aurait f nulle ce qui contredirait que (f, g) est une système fondamental de solutions de (H). On en déduit $f'(\alpha) > 0$ et de même $f'(\beta) < 0$. On observe

$$\mathrm{W}(\alpha)\mathrm{W}(\beta) = f'(\alpha)f'(\beta)g(\alpha)g(\beta) \leqslant 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue W, celle-ci s'annule sur $[\,\alpha\,;\beta\,]$ ce qui est exclu. On en déduit que g s'annule sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$.

Exercice 5 (***)

Soient f, g continues sur $\mathbb{R}_+$ avec g positive et vérifiant

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) \leqslant \mathrm{A} + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} \text{ réel}$$

Montrer
$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) \leqslant \mathrm{A} \exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Corrigé : Soit $\mathrm{U} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{A} + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Comme fg est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a U de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $\mathrm{U}'(x) = f(x)g(x)$ pour tout $x \geqslant 0$. Multipliant l'inégalité d'origine par $g(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$, il vient

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{U}'(x) \leqslant g(x)\mathrm{U}(x) \iff h(x) \leqslant 0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{U}' - g(x)\mathrm{U} = h$$

La fonction h vérifie une inégalité simple. La stratégie consiste alors à expliciter U en fonction de h afin d'exploiter au mieux cette inégalité. Par variation de la constante, notant $\mathrm{G}(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 0$, on trouve

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{U}(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{G}(x)}\left[\mathrm{A} + \int_0^x h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{G}(t)}\,\mathrm{d}t\right]$$

Par conséquent
$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{U}(x) \leqslant \mathrm{A}\mathrm{e}^{\mathrm{G}(x)}$$

On conclut
$$\boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) \leqslant \mathrm{A} \exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)}$$

Remarque : Ce résultat s'intitule *lemme de Gronwall.*

Exercice 6 (***)

Soit z solution de $z'' - a(t)z = 0$ avec $a \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},]\,0\,;+\infty\,[)$. Montrer que $z = 0$ ou bien que z s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Corrigé : Soit z une solution non nulle et soit α une racine de z. On a $z'(\alpha) \neq 0$ sans quoi la solution serait nulle, par unicité du théorème de Cauchy linéaire. On suppose $z'(\alpha) > 0$. Ainsi, la fonction z croît strictement sur un voisinage de α et par conséquent, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $z(t) > 0$ pour tout $\in \,]\,\alpha\,;\alpha+\varepsilon\,[$. Supposons que z admette une racine sur $]\,\alpha\,;+\infty\,[$. D'après ce qui précède, celle-ci sera dans $[\,\alpha+\varepsilon\,;+\infty\,[$. Ainsi, on peut choisir

$$\beta = \operatorname{Inf}\,\{t \in \,]\,\alpha\,;+\infty\,[\;|\; z(t) = 0\}$$

qui est bien défini comme borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$ non vide, minorée et qui vérifie $\alpha < \alpha + \varepsilon \leqslant \beta$. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure et continuité de z, on a $z(\beta) = 0$. Par choix de β, la fonction z ne s'annule pas sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$ et prend donc des valeurs strictement positives (théorème des valeurs intermédiaires). On en déduit que $z'' = a(t)z$ prend des valeurs positives ce qui prouve la convexité de z sur $[\,\alpha\,;\beta\,]$. Ainsi, le graphe de z est situé sous sa corde entre α et β ce qui impose $z(t) \leqslant 0$ pour $t \in \,]\,\alpha\,;\beta\,[$, ce qui est faux. On en déduit que z n'admet d'autre racines sur $]\,\alpha\,;+\infty\,[$. Le raisonnement est identique sur $]\,-\infty\,;\alpha\,[$. On conclut

$$\boxed{\text{Une solution non nulle s'annule au plus une fois.}}$$

Variante : On peut astucieusement considérer z^2. On a

$$(z^2)'' = 2(z'^2 + zz'') = 2(z'^2 + a(t)z^2) \geqslant 0$$

d'où la convexité de z^2. Si z admet deux racines $\alpha < \beta$, z^2 également et par convexité, on a $z^2(t) \leqslant 0$ pour $t \in [\,\alpha\,;\beta\,]$ d'où $z(t) = 0$ pour $t \in [\,\alpha\,;\beta\,]$ et par conséquent $z'(\alpha) = 0$ et $z(\alpha) = 0$ ce qui entraine z nulle.

Exercice 7 (***)

Soient $f, g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continues avec f positive. On s'intéresse au *problème aux limites* (P) :

$$\begin{cases} y'' = f(t)y + g(t) & \text{(L)} \\ y(a) = y(b) = 0 & \text{(B)} \end{cases}$$

1. Soit $y \in \mathrm{S_H}$ avec (H) homogène associée à (L). Montrer que y^2 est convexe.
2. On pose $$\Phi\colon \begin{cases} \mathrm{S_H} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ y \longmapsto (y(a), y(b)) \end{cases}$$
   Montrer que Φ est un isomorphisme.
3. Conclure que le problème aux limites (P) admet une unique solution.

Corrigé : 1. Soit $y \in \mathrm{S_H}$. Par dérivation, on trouve

$$(y^2)'' = 2(y'^2 + yy'') = 2(y'^2 + fy^2) \geqslant 0$$

Ainsi $$\boxed{\text{La fonction } y^2 \text{ est convexe.}}$$

2. L'application Φ est clairement linéaire. Soit $y \in \operatorname{Ker}\Phi$. D'après le résultat de la question précédente, on a y^2 convexe avec $y^2(a) = y^2(b) = 0$. Par convexité, le graphe de y^2 est situé sous

sa corde entre a et b ce qui signifie $y^2(x) \leqslant 0$ pour $x \in [\,a\,;b\,]$. Ainsi, l'application linéaire Φ est injective du plan vectoriel $\mathrm{S_H}$ vers $\mathbb{R}^2$, deux espaces de même dimension finie. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \Phi \text{ est un automorphisme.}}$$

Variante : On peut aussi raisonner sur $\displaystyle\int_a^b f(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t$ puisque en intégrant par partie

$$0 \leqslant \int_a^b f(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b y''(t)y(t)\,\mathrm{d}t = [y'(t)y(t)]_a^b - \int_a^b \frac{y'(t)^2}{2}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$

Par séparation de l'intégrale, on en déduit la nullité de y' et on retrouve le résultat précédent.

3. On sait, quitte à choisir des conditions initiales et invoquer le théorème de Cauchy linéaire, que l'ensemble $\mathrm{S_L}$ est non vide. Soit $u \in \mathrm{S_L}$. On choisit $v \in \mathrm{S_H}$ tel que $\Phi(v) = (u(a), u(b))$, choix possible puisque Φ est un automorphisme. Alors, on vérifie sans difficulté que $u - v$ est solution du problème aux limites (P). Puis, si on considère y et z solutions de (P). Alors, on a $y - z \in \operatorname{Ker} \Phi$ d'où l'unicité. On conclut

$$\boxed{\text{Le problème aux limites (P) admet une unique solution.}}$$

Remarque : On peut facilement généraliser cette situation en considérant le problème

$$\begin{cases} y'' = f(t)y + g(t) & \text{(L)} \\ y(a) = \alpha,\ \ y(b) = \beta & \text{(B)} \end{cases}$$

avec α, β réels. Il suffit de considérer $v \in \mathrm{S_H}$ tel que $\Phi(v) = (u(a) - \alpha, u(b) - \beta)$ dans ce qui précède.

Exercice 8 (***)

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ fonction T-périodique avec $\mathrm{T} > 0$. On considère l'équation

$$y' + \alpha y = b(x) \tag{L}$$

1. Montrer que si f est solution de (L), alors $f_{\mathrm{T}} : x \mapsto f(x + \mathrm{T})$ est aussi solution de (L).
2. En déduire que f solution de (L) est T-périodique si et seulement si $f(0) = f(\mathrm{T})$.
3. Montrer que, sauf pour certaines valeurs de α, l'équation (L) admet une unique solution T-périodique.

Corrigé : 1. Soit $f \in \mathrm{S_L}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) + \alpha f(x) = b(x)$$

d'où $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x + \mathrm{T}) + \alpha f(x + \mathrm{T}) = b(x + \mathrm{T}) = b(x)$$

Ainsi $$\boxed{\text{Si } f \text{ est solution de (L), alors } f_{\mathrm{T}} \text{ l'est également.}}$$

2. Le sens direct est immédiat. Supposons $f(0) = f(\mathrm{T})$. Alors, la fonction $f - f_{\mathrm{T}}$ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + \alpha y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

et comme la fonction nulle est solution, on en déduit la nullité de $f - f_{\mathrm{T}}$ d'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire. Ainsi

$$\boxed{\text{Une solution } f \text{ de (L) est T-périodique si et seulement si } f(0)=f(\mathrm{T}).}$$

3. Soit $f \in \mathrm{S_L}$. Par variation de la constante, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}\left(f(0) + \int_0^x \mathrm{e}^{\alpha t} b(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Ainsi, on obtient $\qquad f(0) = f(\mathrm{T}) \iff \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{\alpha t} b(t)\,\mathrm{d}t = \left(\mathrm{e}^{\alpha \mathrm{T}} - 1\right) f(0)$

Ainsi, si $\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{T}} \neq 1$, on peut déterminer $f(0)$ et donc l'unique solution au problème de Cauchy vérifiant (L) et $y(0) = f(0)$, solution qui sera T-périodique puisque la condition obtenue à la question précédente est satisfaite. En revanche, si $\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{T}} = 1$, la condition de T-périodicité porte uniquement sur α et b et si cette condition est remplie, toute solution de (L) sera T-périodique. Enfin, on a

$$\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{T}} = 1 \iff \mathrm{e}^{\mathrm{T}\,\mathrm{Re}\,(\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{T}\,\mathrm{Im}\,(\alpha)} = 1 \iff \mathrm{Re}\,(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{T}\,\mathrm{Im}\,(\alpha) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

On conclut

$$\boxed{\text{Pour } \alpha \notin \frac{2\mathrm{i}\pi}{\mathrm{T}}\mathbb{Z}, \text{ l'équation (L) admet une unique solution T-périodique.}}$$

Exercice 9 (****)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, b réel et $a > 0$.

1. Montrer que pour tout $f \in \mathrm{E}$, il existe une unique fonction $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ vérifiant

$$(\mathrm{C}) : \begin{cases} g' + ag = f(x) \\ g(0) = b \end{cases}$$

2. Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors g l'est également et déterminer une relation entre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : 1. Soit $f \in \mathrm{E}$. D'après le théorème de Cauchy linéaire, il existe une unique solution au problème de Cauchy (C) et on a g de classe $\mathscr{C}^1$ en tant que solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 résolue. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour tout } f \in \mathrm{E}, \text{ il existe une unique solution } g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ au problème (C).}}$$

Remarque : On trouve

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad g(t) = \mathrm{e}^{-at}\left(b + \int_0^t \mathrm{e}^{as} f(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

2. Soit $x \geqslant 0$. Les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ et $t \mapsto \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{as}\,|f(s)|\,\mathrm{d}s$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. Par intégration par parties (sur le segment $[\,0\,;x\,]$), on trouve

$$\int_0^x \left(\mathrm{e}^{-at}\int_0^t \mathrm{e}^{as}\,|f(s)|\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-at}\int_0^t \mathrm{e}^{as}\,|f(s)|\,\mathrm{d}s\right]_0^x + \frac{1}{a}\int_0^x \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{at}\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

d'où $$\int_0^x \left(\mathrm{e}^{-at}\int_0^t \mathrm{e}^{as}\,|f(s)|\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{a}\int_0^x |f(s)|\,\mathrm{d}s$$

L'intégrabilité de f implique l'intégrabilité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{as}\,|f(s)|\,\mathrm{d}s$ et celle de g s'ensuit puisque $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ est clairement intégrable. En procédant à l'identique mais en remplaçant $|f|$ par f, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(\mathrm{e}^{-at}\int_0^t \mathrm{e}^{as} f(s)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-at}\int_0^t \mathrm{e}^{as} f(s)\,\mathrm{d}s\right]_0^x + \frac{1}{a}\int_0^x \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{at} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{a(s-x)} f(s)\mathbb{1}_{s\leqslant x}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{a}\int_0^x \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{at} f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or, on a pour tous s et x positifs

$$\mathrm{e}^{a(s-x)} f(s)\mathbb{1}_{s\leqslant x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \left|\mathrm{e}^{a(s-x)} f(s)\mathbb{1}_{s\leqslant x}\right| \leqslant |f(s)|$$

Ainsi, par convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{a(s-x)} f(s)\mathbb{1}_{s\leqslant x}\,\mathrm{d}s \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Enfin, avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}$, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est intégrable avec } \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\left(b + \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right).}$$