Feuille d'exercices n°78

Exercice 1 (**)

On pose $$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Étudier les extremums de f sous la contrainte $g(x) \leqslant 1$.

Corrigé : Les fonctions f et g sont polynomiales donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. On a l'équivalence pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$g(x) \leqslant 1 \iff x \in \mathrm{B}_f(0, 1)$$

La fonction continue f admet un minimum et maximum sur la boule unité fermée $\mathrm{B}_f(0, 1)$ qui est un compact de $\mathbb{R}^n$ en tant que fermé borné d'un espace de dimension finie. Les extremums sur $\mathrm{B}_f(0, 1)$ sont atteints soit dans l'intérieur de $\mathrm{B}_f(0, 1)$, soit sur sa frontière. Sans difficulté, on établit $\mathrm{B}_f(0, 1)^\circ = \mathrm{B}(0, 1)$. Par dérivation, on trouve

$$\forall x \in \mathrm{B}(0, 1) \qquad \nabla f(x) = (1, \dots, 1)$$

Sur l'ouvert $\mathrm{B}(0, 1)$, un extremum de f est nécessairement point critique. On en déduit que les extremums de f sur $\mathrm{B}_f(0, 1)$ sont atteints sur la frontière $\partial \mathrm{B}_f(0, 1)$, autrement dit sous la contrainte $g(x) = 1$ ou encore $g(x) - 1 = 0$. Par dérivation, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \nabla g(x) = 2(x_1, \dots, x_n)$$

Ainsi $$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \nabla g(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Or, on a $g(0) = 0 \neq 1$ donc les extremums de f sous la contrainte $g(x) = 1$ sont des points où $\nabla g(x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Par conséquent, d'après le théorème d'optimisation sous contrainte, ces points sont solutions de

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ : \ \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 1$$

c'est-à-dire $$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ : \ (1, \dots, 1) = 2\lambda(x_1, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} x^2 = 1$$

On en déduit notamment que λ n'est pas nul puis

$$x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{2\lambda} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\lambda^2} = 1$$

On trouve $\lambda = \pm \dfrac{\sqrt{n}}{2}$ puis $$x = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

On remarque $$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \sqrt{n} > -\sqrt{n} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

On a donc trouvé les deux candidats pour les points extremums sur $\partial \mathrm{B}_f(0, 1)$ et on conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sous la contrainte } g(x) \leqslant 1 \text{, la fonction } f \text{ admet un maximum} \\ \text{en } \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right) \text{ et un minimum en } \left(-\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dots, -\dfrac{1}{\sqrt{n}} \right).\end{array}}$$

Exercice 2 (***)

Soit $(x_i, y_i)_{i\in[\![1\,;n]\!]}$ une suite de points ($n \geqslant 2$) dont les abscisses ne sont pas toutes égales. On pose

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

1. Justifier que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

2. Montrer $$f(a,b) \xrightarrow[\|(a,b)\| \to +\infty]{} +\infty$$

3. Établir que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser là où il est atteint.

Corrigé : 1. La fonction f est polynomiale donc

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

2. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on note $\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Il vient

$$\begin{aligned} f(a,b) &= \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b)^2 - 2\sum_{i=1}^{n} y_i(ax_i + b) + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &= (a^2+b^2)g(\alpha,\beta) - 2\sqrt{a^2+b^2}\,h(\alpha,\beta) + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \end{aligned}$$

avec $$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \qquad g(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta)^2 \quad \text{et} \quad h(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} y_i(\alpha x_i + \beta)$$

Les fonctions g et h sont continues et atteignent donc leurs bornes sur la sphère unité compacte $\mathrm{S}(0,1)$. On pose

$$\lambda = \operatorname*{Min}_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{S}(0,1)} g(\alpha,\beta) \qquad \mu = \operatorname*{Max}_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{S}(0,1)} h(\alpha,\beta) \qquad \gamma = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

Comme les abscisses x_i ne sont pas toutes égales, on a $\lambda > 0$. Par suite

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad f(a,b) \geqslant (a^2+b^2)\lambda - 2\mu\sqrt{a^2+b^2} + \gamma$$

Par comparaison, il vient $$\boxed{f(a,b) \xrightarrow[\|(a,b)\| \to +\infty]{} +\infty}$$

3. Il existe $\mathrm{R} > 0$ tel que $f(a,b) \geqslant f(0,0)$ pour $\|(a,b)\| > \mathrm{R}$. Et comme on a $f(0,0) \geqslant \operatorname*{Inf}_{(a,b)\in \mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} f(a,b)$, il s'ensuit

$$\operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} f(a,b) = \operatorname*{Inf}_{(a,b)\in \mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} f(a,b)$$

Comme l'espace $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, la boule fermée $\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})$ est un compact et la fonction continue f y admet donc un minimum. Par conséquent, la fonction f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est ouvert donc la fonction f atteint son minimum en un point critique. Par dérivation, on a pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a}(a,b) = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(ax_i + b - y_i) \\ \dfrac{\partial f}{\partial b}(a,b) = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) \end{cases}$$

Pour la suite, on note

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 \qquad \sigma_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$$

Il vient alors

$$\nabla f(a,b) = (0,0) \iff \begin{cases} a(\sigma_x^2 + \bar{x}^2) + b\bar{x} - \sigma_{x,y} - \bar{x}\bar{y} = 0 \\ a\bar{x} + b - \bar{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{y} = a\bar{x} + b \\ a\sigma_x^2 - \sigma_{x,y} = 0 \end{cases}$$

On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ atteint un minimum global en } (a^*, b^*) \text{ avec } a^* = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2} \text{ et } b^* = \bar{y} - a^*\bar{x}.}$$

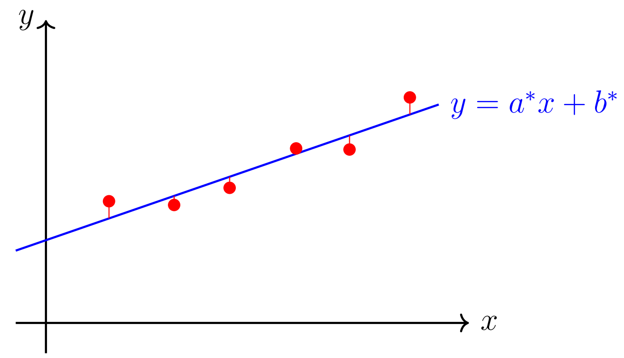

Figure 1 – Droite des moindres carrés

Remarque : Il s'agit bien évidemment de la *droite des moindres carrés.* Il s'agit d'un minimum global strict puisque la fonction f admet un unique point critique.

Exercice 3 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $\Delta = \{(x,x),\ x \in \mathbb{R}^2\}$ et on définit

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \qquad \mathrm{F}(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Montrer que F se prolonge en fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé : On a $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \qquad \mathrm{F}(x,y) = \displaystyle\int_0^1 f'\left(tx + (1-t)y\right)\,\mathrm{d}t$

Posons $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \mathrm{G}(x,y) = \displaystyle\int_0^1 f'\left(tx + (1-t)y\right)\,\mathrm{d}t$

Pour k entier, on note $\mathscr{P}(k)$ la propriété suivante :

$$\forall (i_1, \ldots, i_k) \in [\![1\,;\,2]\!]^k \qquad \partial_{i_k} \ldots \partial_{i_1}\mathrm{G} \text{ existe et est continue sur } \mathbb{R}^2$$

et $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \partial_{i_k} \ldots \partial_{i_1}\mathrm{G}(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha_k}(1-t)^{\beta_k} f^{(k+1)}(tx + (1-t)y)\,\mathrm{d}t$

avec $\alpha_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{\{1\}}(i_j)$ et $\beta_k = k - \alpha_k$.

L'initialisation pour $k = 0$ consiste en la continuité de G :

- Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $t \mapsto f'\left(tx + (1-t)y\right) \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$.
- Pour $t \in [\,0\,;1\,]$, on a $(x,y) \mapsto f'\left(tx + (1-t)y\right)$ continue sur $\mathbb{R}^2$.
- **Domination locale :** Soit K compact de $\mathbb{R}^2$. L'application $(x,y,t) \mapsto f'(tx + (1-t)y)$ est continue donc bornée sur le compact $\mathrm{K} \times [\,0\,;1\,]$ et la domination s'ensuit. On en déduit la continuité de G sur tout compact de $\mathbb{R}^2$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{G} \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

On suppose la propriété vraie pour k entier et $i_{k+1} = 1$. On fixe y réel et on pose

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [\,0\,;1\,] \qquad g_k(x,t) = t^{\alpha_k}(1-t)^{\beta_k} f^{(k+1)}(tx + (1-t)y)$$

• Pour x réel, la fonction $g_k(x,\cdot)$ est continue sur $[\,0\,;1\,]$ donc bornée et par conséquent intégrable sur $[\,0\,;1\,]$.

• Pour t réel, la fonction $g_k(\cdot,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et par dérivation

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [\,0\,;1\,] \qquad \partial_x g_k(x,t) = t^{\alpha_{k+1}}(1-t)^{\beta_{k+1}} f^{(k+2)})(tx + (1-t)y)$$

• Pour x réel, la fonction $\partial_x g_k(x,\cdot)$ est continue par morceaux sur $[\,0\,;1\,]$.

• **Domination locale :** Soit J segment de $\mathbb{R}$. L'application $(x,t) \mapsto \partial_x g_k(x,t)$ est continue donc bornée sur le compact $\mathrm{J} \times [\,0\,;1\,]$ et la domination s'ensuit. On en déduit que pour y fixé, l'application $x \mapsto \partial_{i_k} \ldots \partial_{i_1} \mathrm{G}(x,y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}$ et par dérivation sous l'intégrale

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \partial_{i_{k+1}} \ldots \partial_{i_1} \mathrm{G}(x,y) = \int_0^1 t^{\alpha_{k+1}}(1-t)^{\beta_{k+1}} f^{(k+2)}(tx + (1-t)y)\,\mathrm{d}t$$

On montre comme on l'a fait pour la fonction G la continuité de $\partial_{i_{k+1}} \ldots \partial_{i_1} \mathrm{G}$ sur $\mathbb{R}^2$. La preuve est similaire pour $i_{k+1} = 2$ et ceci clôt la récurrence. On conclut que la fonction G admet des dérivées partielles à tout ordre et que celles-ci sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et par conséquent

$$\boxed{\text{La fonction G de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ prolonge la fonction F.}}$$

Exercice 4 (****)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé : On a $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ car f est polynomiale. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est ouvert donc les éventuels extremums de f sont points critiques. On obtient pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4(x-y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4(x-y)$$

puis $\qquad \nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ x^3 - (x-y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ x(x^2-2) = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\text{Les points critiques de } f \text{ sont } (0,0),\ \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) \text{ et } \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right).}$$

Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4$$

• En $(0,0)$, la matrice hessienne $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ a un déterminant nul. Les conditions du deuxième ordre ne permettent pas de conclure. On a $f(0,0) = 0$. Puis, en considérant des directions particulières, on trouve $f(x,x) = 2x^4 > 0$ pour $x \neq 0$ et $f(x,0) = -2x^2 + x^4 \underset{x\to 0}{\sim} -2x^2 < 0$ pour $x \neq 0$. Ainsi, au voisinage du point $(0,0)$, la fonction f prend des valeurs supérieures et inférieures à $f(0,0)$ donc

$$\boxed{\text{Le point } (0,0) \text{ n'est pas un extremum local.}}$$

Pour raison de symétrie, on se contente de traiter un des deux points critiques restants.

• En $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, la matrice hessienne $\begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ est de déterminant égal à $20^2-4^2>0$ et de trace égale à $40>0$ ce qui prouve que le point considéré est un minimum local strict. Dans l'écriture de $f(x,y)-f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, on décompose $8=2^2+2^2$ pour faire apparaître les carrés $(x^2-2)^2$ et $(y^2-2)^2$ qui s'annulent en le point $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$. Ce faisant, on obtient

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad \begin{aligned} f(x,y)-f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) &= x^4+y^4-2(x-y)^2+8 \\ &= (x^2-2)^2+(y^2-2)^2+2(x+y)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Le point $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ est donc un minimum global, strict d'après l'étude locale précédente. Par symétrie, on conclut

$$\boxed{\text{Les points } \left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) \text{ et } \left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right) \text{ sont des minimums globaux stricts de } f.}$$

Variante : Considérons $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne canonique $\|(x,y)\|^2=x^2+y^2$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a les inégalités suivantes :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad x^4+y^4\geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 \quad \text{et} \quad 0\leqslant (x-y)^2\leqslant 2(x^2+y^2)$$

D'où $$f(x,y)\geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2+\mathrm{O}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{O}(1)\right)$$

Par comparaison $$f(x,y)\xrightarrow[\|(x,y)\|\to+\infty]{}+\infty$$

Ainsi, il existe $\mathrm{R}>0$ tel que $f(x,y)\geqslant 1$ pour tout $\|(x,y)\|>\mathrm{R}$. Sur le compact $\mathrm{B}_f((0,0),\mathrm{R})$, la fonction continue f atteint ses bornes donc en particulier un minimum. Comme $f(0,0)=0\leqslant 1$, alors le minimum atteint sur $\mathrm{B}_f((0,0),\mathrm{R})$ est un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. Or, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ est un ouvert donc le minimum global est un point critique. Pour raison de symétrie, les points $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ et $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ sont de même nature et on en déduit

$$\boxed{\text{Les points } \left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) \text{ et } \left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right) \text{ sont minimums globaux de } f.}$$

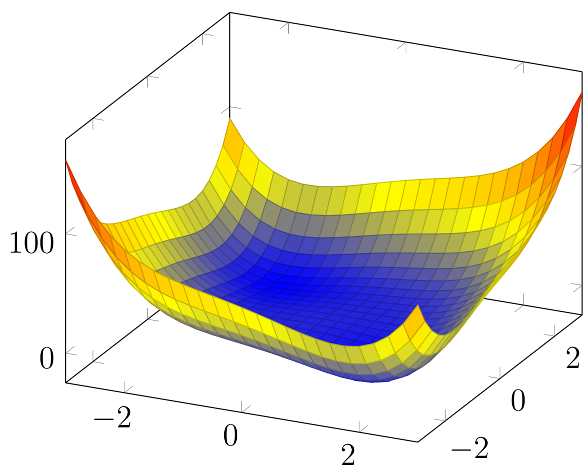

Figure 2 – Graphe de $z=f(x,y)$

Exercice 5 (****)

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ et A : $(a,0)$. Déterminer les points M et N de $\mathcal{C}$ tels que l'aire du triangle AMN soit maximale.

Corrigé : On paramètre M et N par M : $(a\cos(t), b\sin(t))$, N : $(a\cos(u), b\sin(u))$ avec $(t,u)\in\Delta$ où

$$\Delta=\left\{(x,y)\in[\,0\,;2\pi\,]^2\ \mid t\leqslant u\right\}$$

L'aire $\mathcal{A}$ du triangle AMN est donnée par

$$\mathcal{A}(t,u)=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{AN}})\right|$$

avec $\det(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{AN}})=\begin{vmatrix} a\cos(t)-a & a\cos(u)-a\\ b\sin(t) & b\sin(u)\end{vmatrix}=ab\,[(\cos(t)-1)\sin(u)-(\cos(u)-1)\sin(t)]$

La famille $(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{AN}})$ est orientée en sens direct donc son déterminant est positif. Ce n'est pas flagrant *a priori* dans l'expression. Avec les formules trigonométriques $1-\cos x=2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et $\sin x=2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ pour x réel, on obtient

$$\det(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{AN}})=2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin\left(\frac{u-t}{2}\right)$$

Tous les angles concernés sont alors dans $[\,0\,;\pi\,]$ et donc de sinus positif. Ainsi, on a

$$\mathcal{A}(t,u)=\frac{ab}{2}\,[(\cos(t)-1)\sin(u)-(\cos(u)-1)\sin(t)]$$

L'ensemble Δ est compact car fermé borné en dimension finie. La fonction $\mathcal{A}$ est continue comme composée de telles fonctions et atteint son maximum sur le compact Δ. Celui-ci est localisé sur $\partial\Delta$ ou dans $\mathring{\Delta}$.

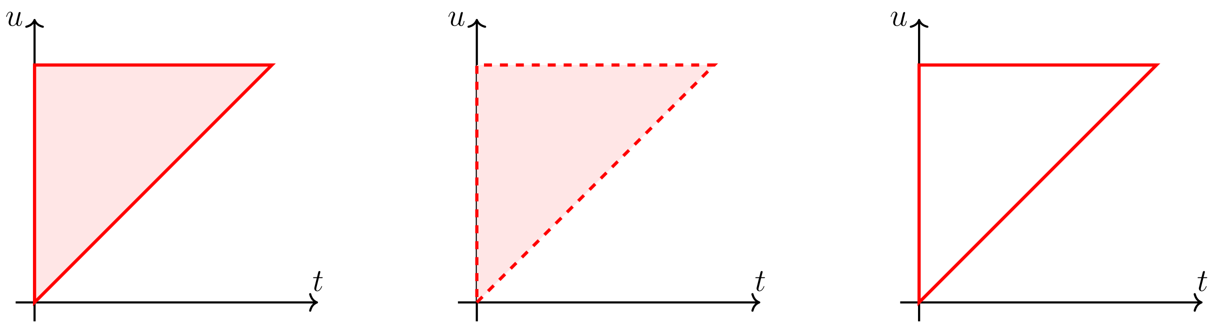

FIGURE 3 – Domaines Δ, $\mathring{\Delta}$ et $\partial\Delta$

On a $\qquad \forall t\in[\,0\,;2\pi\,] \qquad \mathcal{A}(0,t)=0 \qquad \mathcal{A}(t,2\pi)=0 \qquad \mathcal{A}(t,u)=0$

Et avec l'expression sous forme de produit de sinus, on peut détailler sur $\mathring{\Delta}$ et on obtient

$$\forall(t,u)\in\partial\Delta\qquad \mathcal{A}(t,u)=0\quad \text{et}\quad \forall(t,u)\in\mathring{\Delta}\qquad \mathcal{A}(t,u)>0$$

La fonction $\mathcal{A}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{A}$ comme composée de telles fonctions et elle atteint son maximum sur Δ dans l'ouvert $\mathring{\Delta}$ et donc en un point critique. On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}(t,u) = \dfrac{ab}{2}\left[-\sin(t)\sin(u) - (\cos(u)-1)\cos(t)\right] = \dfrac{ab}{2}\left[\cos(t) - \cos(t-u)\right] \\ \dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial u}(t,u) = \dfrac{ab}{2}\left[(\cos(t)-1)\cos(u) + \sin(u)\sin(t)\right] = \dfrac{ab}{2}\left[\cos(t-u) - \cos(u)\right] \end{cases}$$

Ainsi $\quad \nabla\mathcal{A}(t,u) = (0,0) \iff \begin{cases} \cos(t) - \cos(t-u) = 0 \\ \cos(t-u) - \cos(u) = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \cos(t) = \cos(u) \\ \cos(t) - \cos(t-u) = 0 \end{cases} \qquad \iff \begin{cases} u = 2\pi - t \\ \cos(t) - \cos(2t) = 0 \end{cases}$$

et avec la relation $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$ pour t réel, on obtient après factorisation

$$\nabla\mathcal{A}(t,u) = (0,0) \iff \begin{cases} u = 2\pi - t \\ (2\cos(t)+1)(\cos(t)-1) = 0 \end{cases} \qquad \iff (t,u) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$$

On conclut

$$\boxed{\text{L'aire du triangle est maximale pour les points M} : \left(-\frac{a}{2}, \frac{b\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et N} : \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b\sqrt{3}}{2}\right).}$$

Exercice 6 (****)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. On définit

$$\forall (x,y) \in \mathrm{B}(0,\mathrm{R}) \qquad f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+\mathrm{i}y)^n$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathrm{B}(0,\mathrm{R})$. On pourra montrer le caractère $\mathscr{C}^1$ puis généraliser le procédé employé.
2. Déterminer Δf.

Corrigé : 1. Soit $y \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$ et $\mathrm{I} = \left]-\sqrt{\mathrm{R}^2-y^2}\,;\sqrt{\mathrm{R}^2-y^2}\right[$. On pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{I} \qquad u_n(x) = a_n(x+\mathrm{i}y)^n$$

Pour n entier, on a u_n de classe $\mathscr{C}^1$ sur I car polynomiale. Par dérivation, on trouve

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathrm{I} \qquad u_n'(x) = n a_n (x+\mathrm{i}y)^{n-1}$$

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ convergent normalement sur tout compact de $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$. On en déduit que la série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ $\sum u_n$ converge simplement sur I et la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[-r\,;r] \subset \mathrm{I}$ puisque le compact $[-r\,;r] \times \{y\}$ est inclus dans $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$. Ainsi, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I avec

$$\forall (x,y) \in \mathrm{B}(0,\mathrm{R}) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x+\mathrm{i}y)^{n-1}$$

Par ailleurs, la fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue sur $\mathrm{B}(0,\mathrm{R})$ puisque c'est la composée de $(x,y) \mapsto (x+\mathrm{i}y)$ linéaire avec la fonction $z \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$ somme de série entière donc continue sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$. Ainsi, on l'existence de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et sa continuité sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$. On procède à l'identique pour la dérivée partielle en y. Puis, on applique ce résultat sur les fonctions dérivées partielles premières et on prouve l'existence et la continuité des dérivées partielles de f d'ordre 2 sur $\mathrm{B}(0,\mathrm{R})$. On conclut

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^2(\mathrm{B}(0,\mathrm{R}),\mathbb{C})}$$

2. En appliquant les résultats établis à la première question, on a

$$\forall (x,y) \in \mathrm{B}(0,\mathrm{R}) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x+\mathrm{i}y)^{n-1} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{i} n a_n (x+\mathrm{i}y)^{n-1}$$

puis
$$\forall (x,y) \in \mathrm{B}(0,\mathrm{R}) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n (x+\mathrm{i}y)^{n-2}$$

et
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \sum_{n=2}^{+\infty} (\mathrm{i})^2 n(n-1) a_n (x+\mathrm{i}y)^{n-2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$$

On conclut
$$\boxed{\Delta f = 0}$$

Remarque : La fonction f est dite *harmonique.*