ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°76

Exercice 1 (*)

Étudier le caractère $\mathscr{C}^\infty$ des fonctions suivantes :

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = x^2 + xy + y^2$
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = (x+y)\cos(xy)$
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
4. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \max(x,y)$

Exercice 2 (**)

On pose $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{xy}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de f.

Exercice 3 (**)

On pose $$\forall (x,y) \in \left]0\,;+\infty\right[^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln x - \ln y}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ \dfrac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(\left]0\,;+\infty\right[^2, \mathbb{R})$.

Exercice 4 (**)

On pose $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'application f est-elle de classe $\mathscr{C}^2$?

Exercice 5 (*)

On pose $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = (x-y)^2 + x^3 + y^3$$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 (*)

On pose $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = x^2 + y^2 - (x-y)^4$$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 (**)

Soit n entier avec $n \geqslant 2$ et $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| \leqslant 1\}$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n, i \neq j} x_i x_j$$

1. Montrer que f admet un minimum m et un maximum M sur B.
2. Montrer que m et M ne sont pas atteints sur $\mathring{\mathrm{B}}$.
3. Montrer que $m = -1$ et $\mathrm{M} = n - 1$.

Exercice 8 (*)

On pose $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ puis sur $\mathrm{B}_f(0,1)$.

Exercice 9 (**)

On pose $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = x^3 + y^3$$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ puis sur $\mathrm{B}_f(0,1)$.

Exercice 10 (*)

On pose $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = 2x + y \quad \text{et} \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 5$$

Étudier les extremums de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

Exercice 11 (**)

On pose $$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$$

Étudier les extremums de f sous la contrainte $g(x) = 0$.