ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°77

Exercice 1 (***)

Soit E euclidien et $\mathrm{U} = \mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}$. On pose

$$\forall x \in \mathrm{U} \qquad f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U et que pour $x \in \mathrm{U}$, la différentielle $\mathrm{d}f(x)$ est une *similitude*, *i.e.* de la forme αg avec $\alpha \geqslant 0$ et $g \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. On précisera la nature de la similitude en question.

Exercice 2 (***)

On pose $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ puis sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]^2$.

Exercice 3 (***)

On pose $$\forall (x,y) \in \left]0\,;+\infty\right[^2 \qquad f(x,y) = \frac{1}{xy} + x + y$$

Étudier les extremums de f sur $\left]0\,;+\infty\right[^2$.

Exercice 4 (***)

On pose $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = x^2 - xy + y^2$$

et $$\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puis étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter le domaine D et préciser sa nature topologique.
3. Étudier les extremums de f sur D.

Exercice 5 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On dit que f est homogène de degré p entier si

$$\forall (t,x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2 \qquad f(tx,ty) = t^p f(x,y)$$

Montrer que f est homogène de degré p si et seulement si

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = pf$$

Exercice 6 (****)

On pose $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ puis sur $\mathrm{B}_f(0,1)$.

Exercice 7 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dont la matrice jacobienne est, en tout point, orthogonale. On note

$$\forall (i,j,k) \in [\![1 ; n]\!]^3 \qquad \alpha_{i,j,k} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}$$

1. Montrer $\qquad \forall (i,j,k) \in [\![1 ; n]\!]^3 \qquad \alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j} = -\alpha_{k,j,i}$
2. En déduire qu'il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) = \mathrm{A}x + b$$

Exercice 8 (****)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, U ouvert borné non vide de E, $f \in \mathscr{C}^2(\mathrm{U}, \mathbb{R})$ et f continue sur $\bar{\mathrm{U}}$. On définit le *laplacien* de f sur U noté Δf par

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{U} \qquad \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^f}{\partial x_i^2}(x) \quad \text{ou} \quad \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f(x)$$

1. Justifier que f admet un maximum en un point $x_0 \in \bar{\mathrm{U}}$.
2. On suppose $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathrm{U}$. Montrer

$$x_0 \in \partial \mathrm{U} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{U} \qquad f(x) < \operatorname*{Sup}_{y \in \partial \mathrm{U}} f(y)$$

   On pourra supposer par l'absurde que $x_0 \in \mathrm{U}$, justifier l'existence d'un $i \in [\![1 ; n]\!]$ tel que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$ et considérer $\varphi : t \mapsto f(x_0 + te_i)$ avec e_i le i-ème vecteur de la base canonique.

   On suppose désormais que f est *harmonique* sur U, *i.e.* $\Delta f = 0$. On pose

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x\|^2$$

3. Montrer que g_ε est continue sur $\bar{\mathrm{U}}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur U et que

$$\forall x \in \mathrm{U} \qquad \Delta g_\varepsilon(x) > 0$$

4. En déduire $\qquad \forall x \in \mathrm{U} \qquad f(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_{y \in \partial \mathrm{U}} f(y)$