ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°78

Exercice 1 (**)

On pose $\qquad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

Étudier les extremums de f sous la contrainte $g(x) \leqslant 1$.

Exercice 2 (***)

Soit $(x_i, y_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ une suite de points ($n \geqslant 2$) dont les abscisses ne sont pas toutes égales. On pose

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (a x_i + b - y_i)^2$$

1. Justifier que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
2. Montrer $\qquad f(a,b) \xrightarrow[\|(a,b)\| \to +\infty]{} +\infty$
3. Établir que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser là où il est atteint.

Indications : 2. Exprimer $f(a,b)$ à l'aide de $g(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta)^2$ et $h(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} y_i (\alpha x_i + \beta)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathrm{S}(0,1)$ sphère unité de $\mathbb{R}^2$ et préciser la topologie de $\mathrm{S}(0,1)$.
3. Justifier l'égalité $\operatorname*{Inf}_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} f(a,b) = \operatorname*{Inf}_{(a,b) \in \mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} f(a,b)$ avec $\mathrm{R} > 0$ puis utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ est ouvert.

Exercice 3 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $\Delta = \{(x,x),\ x \in \mathbb{R}^2\}$ et on définit

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \Delta \qquad \mathrm{F}(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Montrer que F se prolonge en fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Indications : Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \Delta$, écrire $\mathrm{F}(x,y)$ comme une intégrale entre 0 et 1. En déduire la fonction G qui prolonge naturellement F sur $\mathbb{R}^2$. Montrer ensuite la continuité de G sur $\mathbb{R}^2$ puis l'existence de $\dfrac{\partial^k \mathrm{G}}{\partial x^k}$ pour tout $k \geqslant 1$. Étendre ce résultat en y par symétrie et justifier la continuité des dérivées partielles à tout ordre.

Exercice 4 (****)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

Indications : Pour l'étude du point critique $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, faire apparaître $(x^2-2)^2$ et $(y^2-2)^2$ dans l'expression de $f(x,y) - f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

Exercice 5 (****)

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ et A : $(a,0)$. Déterminer les points M et N de $\mathcal{C}$ tels que l'aire du triangle AMN soit maximale.

Indications : En paramétrant M : $(a\cos(t), b\sin(t))$, N : $(a\cos(u), b\sin(u))$ avec $\Delta : 0 \leqslant t \leqslant u \leqslant 2\pi$, exprimer $\mathcal{A}(t,u)$ à l'aide d'un déterminant puis utiliser du calcul différentiel.

Exercice 6 (****)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R}>0$. On définit

$$\forall (x,y) \in \mathrm{B}(0,\mathrm{R}) \qquad f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+\mathrm{i}y)^n$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathrm{B}(0,\mathrm{R})$. On pourra montrer le caractère $\mathscr{C}^1$ puis généraliser le procédé employé.
2. Déterminer Δf.

Indications : 1. Fixer $y \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$ puis montrer que $x \mapsto f(x,y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{I} = \left]-\sqrt{\mathrm{R}^2-y^2}\,;\sqrt{\mathrm{R}^2-y^2}\right[$. On pourra considérer $\sum u_n$ avec $u_n(x) = a_n(x+\mathrm{i}y)^n$. Montrer ensuite la continuité de $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ sur $\mathrm{B}(0,\mathrm{R})$.