Préparation à l'interrogation n°19

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\sqrt{1+x}$
2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$
3. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de
$$1-\cos(t)^n = 1-\left(1-\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)\right)^n = 1-\left(1-\frac{nt^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)\right) = \frac{nt^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)$$
4. $\mathrm{ch}\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{t^2}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$

2 Trigonométrie

1. $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
2. $\sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$
3. $\cos(t)^2 = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$
4. $\sin(t)^2 = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$

3 Calcul intégral

1. Pour $\alpha > 0$ et $x > 0$, existence et valeur (si convergence) de $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
2. Pour $\alpha > 0$, équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ pour $n \to +\infty$.

   On pourra observer $$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha = n^{\alpha+1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$$

4 Réduction

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. On a
$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable } &\iff \mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u) \\ &\iff \dim \mathrm{E} = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \\ &\iff \chi_u \text{ scindé et } \forall\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u) \qquad \dim\mathrm{E}_\lambda(u) = m_\lambda(u) \end{aligned}$$
2. On a
$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable } &\iff \pi_u \text{ scindé à racines simples} \\ &\iff \exists \mathrm{P}\in\mathbb{K}[\mathrm{X}] \text{ scindé à racines simples et annulateur de } u \end{aligned}$$

5 Exercice type

Réduction de $\mathrm{J} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où J est la matrice constituée de 1 (voir feuille 22).

6 Exercices types

1. Fonction Γ ;
2. Intégrales de Bertrand ;
3. Intégrales de Wallis (voir Aide au test 03) ;
4. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

7 Exercice type

Caractère $\mathscr{C}^1$ de f définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(voir cours).

8 Exercice type

Étude des extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ avec f définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = xy$$

(voir cours).

9 Exercice type

Étude des extremums de f sur $\mathrm{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\}$ avec f définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = xy(1-x-y)$$

(voir cours).

10 Questions de cours

Calcul différentiel, développements en série entière usuels, graphes usuels.