Devoir en temps libre n°16

Problème I

Dans ce qui suit, on confond $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.

1. Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On pose
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) = \mathrm{A}x + b$$
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ puis déterminer $\mathrm{J}_f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2. On suppose que $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et vérifie
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \forall (i,j,k) \in [\![1\,;\,n]\!]^3 \qquad \partial_k \partial_j f_i(x) = 0$$
où les f_i désignent les fonctions coordonnées de f.
   (a) Justifier que pour $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, il existe un réel $a_{i,j}$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \partial_j f_i(x) = a_{i,j}$$
   (b) En déduire qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) = \mathrm{A}x + b$$
   On pourra considérer la fonction $x \mapsto f(x) - \mathrm{A}x$.

Problème II

On pose
$$\forall t \in \mathbb{R}^* \qquad \varphi(t) = \mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^{1/t}$$
et
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$$

1. Montrer que la fonction φ ne s'annule pas sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Dresser le tableau de variations de φ sur $]\,-\infty\,;0\,[$. Montrer qu'il existe une unique solution à l'équation $\varphi(t) = 0$ pour $t < 0$, solution que l'on précisera.
3. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ puis établir pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} xy = 1 \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$
4. Étudier les éventuels extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

Problème III

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$, on a

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pour x, y dans $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi_{x,y}(t) = f(x + t(y-x))$$

   Montrer que la fonction f est convexe si et seulement si, pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$, la fonction $\varphi_{x,y}$ est convexe.

2. On suppose f différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$, la fonction $\varphi_{x,y}$ est dérivable puis établir

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi'_{x,y}(t) = \langle \nabla f(x + t(y-x)), y - x \rangle$$

3. En déduire que si la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$, alors elle est convexe si et seulement si

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \qquad f(y) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

4. Montrer que si la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$, alors elle est convexe si et seulement si

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \qquad \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geqslant 0$$