Corrigé du devoir en temps libre n°15

Problème I

Pour $t \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$ avec R supposé > 0, on a

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n, \quad x'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}, \quad x''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

On injecte dans (H) : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} = 0$

Avec un changement d'indice dans la dernière somme, on obtient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n t^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} t^{n-1} = 0$$

En isolant le premier terme de la seconde somme, on rassemble par linéarité :

$$2a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[n(n+1) a_n + a_{n-2} \right] t^{n-1} = 0$$

Par unicité du développement en série entière, il vient

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2 \qquad n(n+1) a_n + a_{n-2} = 0$$

Une récurrence immédiate donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_0 \neq 0 \Longrightarrow a_{2n} \neq 0$$

Pour obtenir une expression simple de a_{2n}, on écrit un produit téléscopique

$$a_{2n} = a_0 \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{a_{2k}}{a_{2(k-1)}} \right] = a_0 \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{-1}{(2k+1)(2k)} \right] = \frac{a_0 (-1)^n}{(2n+1)!}$$

Posons $\varphi(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}$. En multipliant par t, on identifie

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad t\varphi(t) = \sin(t)$$

ce qui prouve $\mathrm{R} = +\infty$ avec $\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Ainsi $\boxed{\text{L'ensemble des solutions développables en série entière de (H) est } \operatorname{Vect}(\varphi)\,.}$

Plaçons nous sur $\mathrm{I} = \left]0\,;\pi\right[$. L'équation (H) est une équation linéaire différentielle résolue homogène d'ordre 2. L'ensemble $\mathrm{S_H}$ est donc un plan vectoriel. Mettons en œuvre la méthode du wronskien pour la résolution complète. On pose $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$. Si ψ est solution de (H), considérant le wronskien W de (φ, ψ), on a

$$\varphi\psi' - \varphi'\psi = \mathrm{W} \tag{L}$$

On sait que le wronskien vérifie l'équation différentielle $\mathrm{W}' = -\dfrac{2}{t}\mathrm{W}$, autrement dit

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{W}(t) = \frac{\alpha}{t^2} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

On peut désormais considérer l'équation (L) comme une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre. La droite vectorielle $\mathrm{Vect}\,(\varphi)$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée et par variation de la constante, avec λ dérivable sur I et $\psi = \lambda\varphi$, il vient pour $t \in \mathrm{I}$

$$\varphi^2(t)\lambda'(t) = \frac{\alpha}{t^2} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

d'où
$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \lambda(t) = \int \frac{\alpha}{\sin(t)^2}\,\mathrm{d}t + \beta = -\alpha \,\mathrm{cotan}\,(t) + \beta$$

avec α, β réels. Notant $\lambda = -\alpha$, on conclut

$$x \in \mathrm{S_H} \iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall t > 0 \qquad x(t) = \lambda\frac{\sin(t)}{t} + \mu\frac{\cos(t)}{t}$$

Ainsi
$$\boxed{\mathrm{S_H} = \left\{t \in \mathrm{I} \mapsto \lambda\frac{\sin(t)}{t} + \mu\frac{\cos(t)}{t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

Remarque : On peut aussi procéder avec la méthode de Lagrange ou même conjecturer la forme des solutions manquantes puis la vérifier.

Problème II

1. On vérifie sans difficulté que ch et sh sont solutions de (H) et comme la famille (ch , sh) est clairement libre, on conclut

$$\boxed{\text{La famille (ch , sh) est un système fondamental de solutions de (H).}}$$

2. Soient a, b réels. On a
$$\mathrm{sh}\,(a-b) = \frac{\mathrm{e}^a\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{-a}\mathrm{e}^b}{2}$$

On observe $\mathrm{e}^x = \mathrm{ch}\,(x) + \mathrm{sh}\,(x)$ pour x réel. Par substitution, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{sh}\,(a-b) = \frac{(\mathrm{sh}\,(a) + \mathrm{ch}\,(a))(\mathrm{ch}\,(b) - \mathrm{sh}\,(b)) - (\mathrm{sh}\,(b) + \mathrm{ch}\,(b))(\mathrm{ch}\,(a) - \mathrm{sh}\,(a))}{2}$$

Ainsi
$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad \mathrm{sh}\,(a-b) = \mathrm{sh}\,(a)\,\mathrm{ch}\,(b) - \mathrm{sh}\,(b)\,\mathrm{ch}\,(a)}$$

3. On procède par variation de la constante. On cherche une solution de (L) de la forme $\lambda\,\mathrm{ch} + \mu\,\mathrm{sh}$ avec λ, μ dérivables et vérifiant pour t réel

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,(t) & \mathrm{sh}\,(t) \\ \mathrm{sh}\,(t) & \mathrm{ch}\,(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |\cos(t)| \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,(t) & -\mathrm{sh}\,(t) \\ -\mathrm{sh}\,(t) & \mathrm{ch}\,(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ |\cos(t)| \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} \lambda'(t) = -\,\mathrm{sh}\,(t)\,|\cos(t)| \\ \mu'(t) = \mathrm{ch}\,(t)\,|\cos(t)| \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi $\quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \lambda(t) = \alpha - \displaystyle\int_0^t \mathrm{sh}\,(s)\,|\cos(s)|\;\mathrm{d}s \quad$ et $\quad \mu(t) = \beta + \displaystyle\int_0^t \mathrm{ch}\,(s)\,|\cos(s)|\;\mathrm{d}s$

avec α, β réels. En exploitant la relation établie à la question précédente, on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \alpha\,\mathrm{ch}\,(t) + \beta\,\mathrm{sh}\,(t) + \int_0^t \mathrm{sh}\,(t-s)\,|\cos(s)|\;\mathrm{d}s$$

Pour $t \geqslant 0$, on a $t-s \geqslant 0$ pour $s \in [\,0\,;t\,]$ puis $\displaystyle\int_0^t \operatorname{sh}(t-s)\,|\cos(s)|\,\mathrm{d}s \geqslant 0$ et pour $t \leqslant 0$, on a $\displaystyle\int_0^t \operatorname{sh}(t-s)\,|\cos(s)|\,\mathrm{d}s = \int_t^0 \operatorname{sh}(s-t)\,|\cos(s)|\,\mathrm{d}s$ par imparité de sh puis $s-t \geqslant 0$ pour $s \in [\,t\,;0\,]$ d'où $\displaystyle\int_t^0 \operatorname{sh}(s-t)\,|\cos(s)|\,\mathrm{d}s \geqslant 0$. Ainsi, en choisissant $\alpha \geqslant 0$ et $\beta = 0$, la fonction définissant x est positive et on conclut

$$\boxed{\text{L'équation (L) admet des solutions positives.}}$$

4.(a) Si x était constante, on aurait $x'' = 0$ d'où $x(t) = -|\cos(t)|$ pour t réel ce qui contredit la constance de x.

$$\boxed{\text{Une solution positive } x \text{ de (L) est non constante.}}$$

4.(b) On a $x'' = x + |\cos(t)| \geqslant 0$ ce qui prouve que x est convexe. Son graphe est donc situé au dessus de ses tangentes et comme la fonction x n'est pas constante, son graphe admet des tangentes non horizontales ce qui interdit le caractère borné sur $\mathbb{R}$. On conclut

$$\boxed{\text{Une solution positive } x \text{ de (L) n'est pas bornée.}}$$

Problème III

1. Le polynôme minimal π_u n'est pas scindé à racines simples. Ainsi

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } u \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ vérifie $\pi_\mathrm{A} = \pi_u$.

2. On a $\pi_u(u) = 0$ d'où $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} \pi_u(u)$ et comme $(\mathrm{X}-1)^2 \wedge (\mathrm{X}-2) = 1$, il vient d'après le lemme des noyaux

$$\boxed{\mathrm{E} = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}\,)^2 \oplus \operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}\,)}$$

3. On a $$p + q = (u-\mathrm{id}\,)^2 + 2u - u^2 = u^2 - 2u + \mathrm{id} + 2u - u^2$$

D'où $$\boxed{p + q = \mathrm{id}}$$

4. Soit $x \in \mathrm{E}$. Comme $p + q = \mathrm{id}$, il vient $x = p(x) + q(x)$ et

$$(u - 2\,\mathrm{id}\,) \circ p(x) = \pi_u(u)(x) = 0 \quad \text{et} \quad (u-\mathrm{id}\,)^2 \circ q(x) = -u \circ \pi_u(u)(x) = 0$$

ce qui prouve $$(p(x), q(x)) \in \operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}\,) \times \operatorname{Ker}(u-\mathrm{id}\,)^2$$

et cette décomposition est unique. On conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'application } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Ker}(u-2\,\mathrm{id}\,) \text{ parallèlement à } \operatorname{Ker}(u-\mathrm{id}\,)^2 \\ \text{et } q \text{ la projection associée.}\end{array}}$$

5. On a $(u - 2\,\mathrm{id}\,) \circ p = \pi_u(u) = 0$ d'où $u \circ p = 2p$. Par une récurrence immédiate, on obtient

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad u^k \circ p = 2^k p}$$

6. Par continuité de la composition (linéaire en dimension finie), on a

$$\mathrm{e}^{u} \circ p = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!} \right) \circ p = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} u^k \circ p = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} 2^k p$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{e}^{u} \circ p = \mathrm{e}^{2} p}$$

7. On a établi dans la question 4 que $(u - \mathrm{id})^2 \circ q = 0$. Par suite

$$\boxed{\forall k \geqslant 2 \qquad (u - \mathrm{id})^k \circ q = (u - \mathrm{id})^{k-2} \circ (u - \mathrm{id})^2 \circ q = 0}$$

8. On a $u = \mathrm{id} + (u - \mathrm{id})$ avec id et $u - \mathrm{id}$ qui commutent. Par conséquent, il vient par propriété fondamentale de l'exponentielle $\mathrm{e}^{u} = \mathrm{e}^{id + (u - \mathrm{id})} = \mathrm{e}^{\mathrm{id}} \circ \mathrm{e}^{u - \mathrm{id}}$. On a $\mathrm{e}^{\mathrm{id}} = \mathrm{e}\,\mathrm{id}$ et par continuité de la composition, on trouve

$$\mathrm{e}^{u} \circ q = \mathrm{e} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(u - \mathrm{id})^k}{k!} \right) \circ q = \mathrm{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(u - \mathrm{id})^k \circ q}{k!} = \mathrm{e}\, (q + (u - \mathrm{id}) \circ q)$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{e}^{u} \circ q = \mathrm{e}\, u \circ q}$$

9. On a $$\mathrm{e}^{u} = \mathrm{e}^{u} \circ (p + q) = \mathrm{e}^{2} p + \mathrm{e}\, u \circ q$$

D'où $$\boxed{\mathrm{e}^{u} = \mathrm{e}^{2} (u - \mathrm{id})^2 + \mathrm{e}\, u^2 \circ (2\,\mathrm{id} - u) = -\mathrm{e}\, u^3 + (\mathrm{e}^{2} + 2\mathrm{e}) u^2 - 2\mathrm{e}^{2} u + \mathrm{e}^{2}\, \mathrm{id}}$$

Problème IV (bonus)

1. Par variation de la constante, on trouve

$$\boxed{\forall u \in \mathscr{C}^0([0\,;1], \mathbb{R}) \qquad \Phi(u) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}} \left[\mathrm{X}_0 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s} \mathrm{B} u(s)\, \mathrm{d}s \right]}$$

2. On pose $$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{E} \qquad \Lambda(\mathrm{X}) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}} (\mathrm{X}_0 + \mathrm{X})$$

L'application Λ est une permutation de E puisque pour $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathrm{E}^2$, on a

$$\Lambda(\mathrm{X}) = \mathrm{Y} \iff \mathrm{X} = \mathrm{e}^{-\mathrm{A}} \mathrm{Y} - \mathrm{X}_0$$

et comme on a $\Phi = \Lambda \circ \Psi$, on conclut

$$\boxed{\Phi \text{ surjective} \iff \Psi \text{ surjective}}$$

3. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$. La matrice $\mathrm{K}^\top$ est constituée des lignes $\left(\mathrm{A}^k \mathrm{B}\right)^\top$ pour $k \in [\![0\,; n-1]\!]$. Par suite, on a

$$\mathrm{K}^\top \mathrm{X} = 0 \iff \forall k \in [\![0\,; n-1]\!] \qquad \left(\mathrm{A}^k \mathrm{B}\right)^\top \mathrm{X} = 0$$

Autrement dit $$\boxed{\mathrm{K}^\top \mathrm{X} = 0 \iff \forall k \in [\![0\,; n-1]\!] \qquad \left\langle \mathrm{A}^k \mathrm{B}, \mathrm{X} \right\rangle = 0}$$

4. Soit $u \in \mathscr{C}^0([0\,;1], \mathbb{R})$. Pour $s \in [0\,;1]$, notons $\beta_i(s)$ la i-ème coordonnée de $\mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}$ pour $i \in [\![1\,; n]\!]$. Il vient par linéarité du produit scalaire en la première variable avec les propriétés de fonctions vectorielles

$$\langle \Psi(u), \mathrm{X} \rangle = \left\langle \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s} \mathrm{B} u(s)\, \mathrm{d}s, \mathrm{X} \right\rangle = \int_0^1 \left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s} \mathrm{B} u(s), \mathrm{X} \right\rangle \mathrm{d}s$$

Ainsi $$\boxed{\forall u \in \mathscr{C}^0([0\,;1], \mathbb{R}) \qquad \langle \Psi(u), \mathrm{X} \rangle = \int_0^1 \left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s} \mathrm{B}, \mathrm{X} \right\rangle u(s)\, \mathrm{d}s}$$

5. Soit $X \in E$ tel que $K^\top X = 0$. D'après l'équivalence établie à la question 3, on a

$$\forall k \in [\![0\,;\, n-1]\!] \qquad \left\langle A^k B, X \right\rangle = 0$$

Or, notant $d = \deg \pi_A$, on sait que $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{R}[A]$ avec $d \leqslant n$. Par conséquent, il vient par linéarité en la première variable du produit scalaire

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \left\langle A^k B X \right\rangle = 0$$

puis pour $s \in [\,0\,;1\,]$ $$\forall N \in \mathbb{N} \qquad \left\langle \sum_{k=0}^{N} \frac{(-As)^k}{k!} B, X \right\rangle = 0$$

et par continuité du produit matriciel et de l'application linéaire en dimension finie $Y \mapsto \langle Y, X \rangle$, on obtient faisant tendre $N \to +\infty$

$$\left\langle e^{-As} B, X \right\rangle = 0$$

D'après l'expression établie à la question précédente, il vient $\langle \Psi(u), X \rangle = 0$ et on conclut

$$\boxed{K^\top X = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Im } \Psi \subset \text{Vect}\,(X)^\perp}$$

Comme le rang est invariant par transposition, on a

$$\text{rg}\,(K) < n \iff \exists X \in E \setminus \{0_E\} \quad | \quad K^\top X = 0$$

Sans difficulté, on a $\Psi \in \mathscr{L}(\mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], E)$ par linéarité de l'intégrale et du produit à gauche et par conséquent, l'image $\text{Im } \Psi$ est un sev de E. Enfin, pour $X \in E \setminus \{0_E\}$, l'espace $\text{Vect}\,(X)^\perp$ est un hyperplan de E. L'inclusion $\text{Im } \Psi \subset \text{Vect}\,(X)^\perp$ contredit Ψ surjective et contredit donc, d'après le résultat de la question 2, la contrôlabilité du système (S). On conclut

$$\boxed{\text{rg}\,(K) < n \quad \Longrightarrow \quad \text{le système (S) n'est pas contrôlable}}$$

6.(a) Dans l'espace E euclidien, si $(\text{Im } \Psi)^\perp = \{0_E\}$, alors $\text{Im } \Psi = E$ et comme l'application Ψ n'est pas surjective, on en déduit par contraposée qu'il existe $X \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $X \in (\text{Im } \Psi)^\perp$ d'où $\text{Vect}\,(X) \subset (\text{Im } \Psi)^\perp$ et passant à l'orthogonal, on conclut

$$\boxed{\text{Il existe } X \in E \setminus \{0_E\} \text{ tel que } \text{Im } \Psi \subset \text{Vect}\,(X)^\perp.}$$

6.(b) D'après l'égalité établie à la question 4, on a

$$\forall u \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R}) \qquad \int_0^1 \left\langle e^{-As} B, X \right\rangle u(s)\, ds = 0$$

En particulier, si on choisit

$$\forall s \in [\,0\,;1\,] \qquad u(s) = \left\langle e^{-As} B, X \right\rangle$$

on trouve $$\int_0^1 u^2(s)\, ds = 0$$

La fonction u^2 est continue comme composée de fonctions continues, positive et par séparation de l'intégrale, on obtient

$$\boxed{\forall s \in [\,0\,;1\,] \qquad \left\langle e^{-As} B, X \right\rangle = 0}$$

La fonction u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ puisque la fonction exponentielle $s \mapsto e^{-As}$ l'est et par linéarité de $Y \mapsto \langle Y, X \rangle$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (s,k) \in [\,0\,;1\,] \times \mathbb{N} \qquad u^{(k)}(s) = (-1)^k \left\langle A^k e^{-As} B, X \right\rangle$$

Comme la fonction u est nulle, on conclut

$$\boxed{\forall k \in [\![0\,;\, n-1]\!] \qquad u^{(k)}(0) = \left\langle \mathrm{A}^k\mathrm{B}, \mathrm{X} \right\rangle = 0}$$

Variante : On peut tout à fait définir u sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad u(s) = \left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{A}s}\mathrm{B}, \mathrm{X} \right\rangle$$

Par continuité du produit scalaire en la première variable (linéaire en dimension finie), on a pour s réel

$$u(s) = \left\langle \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{s^k \mathrm{A}^k\mathrm{B}}{k!}, \mathrm{X} \right\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\left\langle \mathrm{A}^k\mathrm{B}, \mathrm{X} \right\rangle}{k!} s^k$$

ce qui prouve que la fonction est développable en série entière. Or, on a $u(s) = 0$ pour tout $s \in [\,0\,;1\,]$, intervalle non réduit à un point contenant zéro. Ainsi, par unicité du développement en série entière, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad (-1)^k \frac{\left\langle \mathrm{A}^k\mathrm{B}, \mathrm{X} \right\rangle}{k!} = 0$$

et on retrouve en particulier le résultat attendu.

6.(c) Il s'ensuit $\mathrm{K}^\top\mathrm{X} = 0$ d'où $\operatorname{rg}(\mathrm{K}) < n$ et avec le résultat de la question 2, on a donc établi

$$\boxed{\text{le système (S) n'est pas contrôlable} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rg}(\mathrm{K}) < n}$$

7. Par contraposée des implications établies aux questions 5 et 6.(c), on conclut

$$\boxed{\text{Le système (S) est contrôlable} \iff \operatorname{rg}(\mathrm{K}) = n}$$