ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°79

Exercice 1 (*)

Décrire les groupes d'ordre 3. Donner deux exemples de tels groupes.

Exercice 2 (*)

Déterminer deux groupes d'ordre 6 non isomorphes.

Exercice 3 (*)

Déterminer tous les automorphismes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 4 (*)

Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 5 (*)

Soient $(\mathrm{G}, \times)$, $(\mathrm{G}', \times)$ des groupe, $\mathrm{C} = \{aba^{-1}b^{-1}, (a, b) \in \mathrm{G}^2\}$ et $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ un morphisme de groupes. Montrer

$$(\varphi(\mathrm{G}), \times) \text{ abélien } \iff \langle \mathrm{C} \rangle \subset \mathrm{Ker}\ \varphi$$

Exercice 6 (*)

Soit $n \geqslant 2$. Calculer
$$\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma)$$

Exercice 7 (**)

1. Déterminer les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. Déterminer les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Exercice 8 (**)

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 9 (**)

Soit $n \geqslant 3$. Montrer que S_n est engendré par les permutations suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & n \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n-1 & n \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$.

Exercice 10 (**)

Soit n entier avec $n \geqslant 2$ et d un diviseur de n. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ de cardinal d.

Exercice 11 (**)

Dénombrer les p-cycles de S_n.

Exercice 12 (**)

Soit n entier non nul. Pour $\sigma \in \mathrm{S}_n$, on pose $\mathrm{M}_\sigma = \big(\delta_{i,\sigma(j)}\big)_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f_\sigma \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ l'application canoniquement associée. Déterminer la nature de l'application de $\dfrac{1}{n!}\sum\limits_{\sigma\in\mathrm{S}_n} f_\sigma$ et préciser son noyau et son image.

Exercice 13 (**)

Soit $(\mathrm{G}, \times)$ un groupe fini d'ordre n. Montrer que

1. $(\mathrm{G}, \times)$ est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathrm{S}_n, \circ)$;
2. $(\mathrm{G}, \times)$ est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathcal{A}_{n+2}, \circ)$;