ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°80

Exercice 1 (**)

Soit $(\mathrm{G}, \star)$ un groupe.

1. Montrer qu'une union de deux sous-groupes de $(\mathrm{G}, \star)$ est un sous-groupe si et seulement si l'un contient l'autre.
2. Le résultat se généralise-t-il à plus de deux sous-groupes ?

Exercice 2 (***)

Soit $(\mathrm{G}, \times)$ un groupe et $\mathrm{A} \subset \mathrm{G}$. On définit le *centralisateur* de A noté $\mathrm{C}(\mathrm{A})$ par

$$\mathrm{C}(\mathrm{A}) = \{x \in \mathrm{G} \mid \forall a \in \mathrm{A} \quad ax = xa\}$$

1. Montrer que $\mathrm{C}(\mathrm{A})$ est sous-groupe de G et $\mathrm{C}(\mathrm{G}) \subset \mathrm{C}(\mathrm{A})$.
2. Montrer que $\mathrm{C}(\mathrm{A}) = \mathrm{C}(\langle \mathrm{A} \rangle)$.
3. Déterminer $\mathrm{C}(\mathrm{S}_n)$ pour $n \geqslant 3$.

Exercice 3 (***)

Soit $(\mathrm{G}, \times)$ une groupe fini d'ordre n et $x \in \mathrm{G}$ avec $o(x) = d$. Montrer

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad o(x^k) = \frac{d}{d \wedge k}$$

Exercice 4 (***)

Soit $(\mathrm{G}, \times)$ un groupe. Pour $a \in \mathrm{G}$, on note

$$\forall x \in \mathrm{G} \qquad \varphi_a(x) = axa^{-1}$$

1. Montrer que φ_a est un automorphisme de G pour tout $a \in \mathrm{G}$.
2. Montrer que $\mathcal{I} = \{\varphi_a, a \in \mathrm{G}\}$ est un sous-groupe du groupe des automorphismes de G.
3. Montrer que si $(\mathcal{I}, \circ)$ est monogène, alors $(\mathrm{G}, \times)$ est commutatif.

Exercice 5 (***)

Soient $(\mathrm{G}_1, \times)$ et $(\mathrm{G}_2, \times)$ deux groupes cycliques.

1. Pour $(x, y) \in \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$, déterminer l'ordre de (x, y) en fonction de $o(x)$ et $o(y)$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour avoir $\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$ cyclique.

Exercice 6 (***)

Soit $(\mathrm{G}, \star)$ un groupe cyclique et H un sous-groupe de G. Démontrer que H est cyclique.

Exercice 7 (***)

Quel est l'ordre maximal d'un élément de S_8 ?

Exercice 8 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, n un entier non nul et $(\mathrm{X}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes avec $\mathrm{X}_i \sim \mathscr{U}_{[\![1\,;\, i]\!]}$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. On pose

$$\sigma_n = \begin{pmatrix}1 & \mathrm{X}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & \mathrm{X}_2\end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix}n & \mathrm{X}_n\end{pmatrix}$$

Montrer que $\sigma_n \sim \mathscr{U}_{\mathrm{S}_n}$.

Exercice 9 (***)

Soit $n \geqslant 2$. On note D_n les *dérangements* de S_n, c'est-à-dire les permutations de S_n sans point fixe. Calculer $\sum\limits_{\sigma\in\mathrm{D}_n} \varepsilon(\sigma)$.

Exercice 10 (****)

Décrire les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.