ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°81

Exercice 1 (***)

Soit G un groupe fini vérifiant $\qquad \forall x \in \mathrm{G} \qquad x^2 = e$

1. Montrer que G est un groupe abélien.
2. On suppose que G est fini non réduit à $\{e\}$.
   (a) Justifier l'existence de $n = \min\{\mathrm{Card\ P},\ \mathrm{P} \subset \mathrm{G} \text{ tel que } \langle \mathrm{P} \rangle = \mathrm{G}\}$ entier non nul.
   (b) Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{G}^n$ tel que $\mathrm{G} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. On pose
   $$\varphi : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \to \mathrm{G},\ (\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n}) \mapsto x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \quad \text{avec} \quad \alpha_i \in \{0, 1\}$$
   Justifier que φ est bien définie et vérifier que φ est un morphisme de de groupes.
   (c) Conclure que $\qquad \mathrm{G} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$

Indications : 1. Considérer $(xy)^2$ pour $(x, y) \in \mathrm{G}^2$.
2.(a) Montrer que $\{\mathrm{Card\ P},\ \mathrm{P} \subset \mathrm{G} \text{ tel que } \langle \mathrm{P} \rangle = \mathrm{G}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et vérifier $\langle \varnothing \rangle \neq \mathrm{G}$.
2.(b) Vérifier que $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ ne dépend pas du choix des $\alpha_i \in \overline{\alpha_i}$. Utiliser le caractère abélien de G pour établir que φ est un morphisme de groupes.
2.(c) Établir que φ est un isomorphisme.

Exercice 2 (***)

Soient p et q des entiers non nuls premiers entre eux. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{U}_p \times \mathbb{U}_q \to \mathbb{U}_{pq}, (x, y) \mapsto xy$ est un isomorphisme de groupes.

Indications : Justifier que φ est bien définie et est un morphisme de groupes. Établir que φ est injective à l'aide du théorème de Gauss ou que φ est surjective avec la relation de Bézout.

Exercice 3 (***)

Soit φ un morphisme d'un groupe fini $(\mathrm{G}, \times)$ vers un autre groupe. Établir
$$\mathrm{Card\ G} = \mathrm{Card\ Ker}\ \varphi \times \mathrm{Card\ Im}\ \varphi$$
Indications : Considérer la relation binaire
$$\forall (x, y) \in \mathrm{G}^2 \qquad x \mathcal{R} y \iff \varphi(x) = \varphi(y)$$
vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence puis considérer ses classes.

Exercice 4 (***)

Soit $(\mathrm{G}, \times)$ un groupe fini d'ordre n. Montrer que

1. G est isomorphe à un sous-groupe de S_n ;
2. G est isomorphe est à un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Indications : 1. Considérer $\Phi : a \mapsto \varphi_a$ où $\varphi_a : \mathrm{G} \to \mathrm{G}, x \mapsto ax$.
2. Considérer $\chi : \mathrm{S}_n \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \sigma \mapsto \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exercice 5 (***)

Soit $(\mathrm{G}, \times)$ un groupe cyclique de cardinal n. Montrer que le cardinal de $(\mathrm{Aut(G)}, \circ)$ est $\varphi(n)$.

Indications : Notant $\mathrm{G} = \langle a \rangle$, observer que pour $f \in \mathrm{Aut(G)}$, on a $f(a) = a^\ell$ avec un entier $\ell \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ qui caractérise f puis utiliser ensuite un isomorphisme naturel entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et G.

Exercice 6 (***)

Décrire les groupes d'ordre 4.

Indications : Si G d'ordre 4 non cyclique, montrer qu'il contient deux éléments distincts x et y d'ordre 2 puis décrire G. Considérer alors un morphisme de groupes à valeurs dans $\left\{x^k y^\ell, (k, \ell) \in \{0, 1\}^2\right\}$.

Exercice 7 (***)

Montrer qu'un groupe est fini si et seulement si l'ensemble de ses sous-groupes est fini.

Indications : Si l'ensemble des sous-groupes de G est fini, établir que $\mathrm{G} = \bigcup_{x \in \mathrm{F}} \langle x \rangle$ avec F partie finie de G puis montrer que $\langle x \rangle$ est fini pour tout $x \in \mathrm{F}$.

Exercice 8 (****)

Montrer que les groupes $(\mathbb{Z}^n, +)$ avec n entier non nul sont deux à deux non isomorphes.

Indications : Montrer que n est le cardinal minimal d'une famille génératrice de $\mathbb{Z}^n$ puis considérer un isomorphisme de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{Z}^m$ avec n et m entiers non nuls.