ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°70

Exercice 1 (*)

L'application $\exp : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est-elle surjective ? injective ?

Corrigé : On a $\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ donc l'exponentielle n'est pas surjective. Par ailleurs, notant $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M} = \mathrm{diag}(\mathrm{A}, 0, \ldots, 0)$, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{M}} = \mathrm{I}_n = \mathrm{e}^0$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'exponentielle de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ n'est ni injective, ni surjective.}}$$

Exercice 2 (**)

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1. $\begin{cases} x' = 2x - y + \mathrm{e}^{-t} \\ y' = -x + 2y + 2\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = 2x - y + \mathrm{e}^{t} \\ y' = -x + 2y + \mathrm{e}^{t} \end{cases}$

Corrigé : 1. Étudions le cas d'une solution particulière évidente de la forme $x(t) = a\mathrm{e}^{-t}$ et $y(t) = b\mathrm{e}^{-t}$ pour t réel. Il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} -a\mathrm{e}^{-t} = 2a\mathrm{e}^{-t} - b\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t} \\ -b\mathrm{e}^{-t} = -a\mathrm{e}^{-t} + 2b\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-t} \end{cases} \iff \begin{cases} -3a + b = 1 \\ a - 3b = -2 \end{cases} \iff (a, b) = -\frac{1}{8}(5, 7)$$

La stratégie est payante. Il ne reste plus qu'à résoudre le système homogène

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + 2y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Réduisons A. On a

$$\chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} - 2 & 1 \\ 1 & \mathrm{X} - 2 \end{vmatrix} = (\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} - 3) \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) = \{1, 3\}$$

On trouve une matrice de passage $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(1, 3)$. Ainsi

$$\mathrm{X} \in \mathrm{S_H} \iff \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) = \alpha\mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha,\, \beta \text{ réels}$$

On conclut $$\boxed{\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x(t) = \alpha\mathrm{e}^{t} + \beta\mathrm{e}^{3t} - \frac{5}{8}\mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = \alpha\mathrm{e}^{t} - \beta\mathrm{e}^{3t} - \frac{7}{8}\mathrm{e}^{-t} \end{cases}}$$

Remarque : On peut aussi résoudre le système réduit avec second membre

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}(t) \iff \mathrm{Y}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{APY} + \mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}(t)$$

qui requiert le calcul de P^{-1}. L'effort calculatoire est équivalent à celui de la méthode présentée ci-avant.

2. Le système homogène associé est le même que celui de la question précédente. La recherche d'une solution particulière évidente de la forme $x(t) = a\mathrm{e}^t$ et $y(t) = b\mathrm{e}^t$ pour t réel donne

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} a\mathrm{e}^t = 2a\mathrm{e}^t - b\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t \\ b\mathrm{e}^t = -a\mathrm{e}^t + 2b\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t \end{cases} \iff \begin{cases} a - b = -1 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

qui est évidemment incompatible. Procédons à une variation de la constante. Soient $\lambda, \mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et X de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) = \lambda(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t + \mu(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}$$

On résout pour t réel $\qquad \lambda'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t + \mu'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$

d'où $\qquad \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t)\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

puis $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} \lambda(t) = t + \alpha \\ \mu(t) = \beta \end{cases}$

avec α, β réels. On conclut

$$\boxed{\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x(t) = t\mathrm{e}^t + \alpha\mathrm{e}^t + \beta\mathrm{e}^{3t} \\ y(t) = t\mathrm{e}^t + \alpha\mathrm{e}^t - \beta\mathrm{e}^{3t} \end{cases}}$$

Remarque : La même variante que celle précédemment mentionnée fonctionne. Sa mise en œuvre requiert également une variation de la constante mais sur deux équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Exercice 3 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et s une symétrie de E. Expliciter $\exp(s)$ puis calculer $\det(\exp(s))$ et $\mathrm{Tr}\,(\exp(s))$.

Corrigé : On a

$$\boxed{\exp(s) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \right) \mathrm{id} + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \right) s = \mathrm{ch}\,(1)\,\mathrm{id} + \mathrm{sh}\,(1) s}$$

Dans $\mathscr{B}$ base adaptée à s, on trouve

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{ch}\,(1)\,\mathrm{id} + \mathrm{sh}\,(1)s) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}\,\mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-1}\mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad r = \dim \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}\,)$$

D'où

$$\boxed{\det(\exp(s)) = \mathrm{e}^{\dim \mathrm{Ker}\,(s-\mathrm{id}\,) - \dim \mathrm{Ker}\,(s+\mathrm{id}\,)} \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}\,(\exp(s)) = \mathrm{e}\,\dim \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}\,) - \mathrm{e}^{-1} \dim \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}\,)}$$

Exercice 4 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et p et q deux projecteurs associés. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, calculer $\exp(\alpha p + \beta q)$.

Corrigé : On a $p^k = p$ pour tout $k \geqslant 1$ d'où

$$\mathrm{e}^{\alpha p} = \mathrm{id} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha^k p^k}{k!} = \mathrm{id} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} p = \mathrm{id} + (\mathrm{e}^{\alpha} - 1)\, p$$

Comme $p \circ q = q \circ p = 0$, il vient

$$\exp(\alpha p + \beta q) = \mathrm{e}^{\alpha p}\mathrm{e}^{\beta q} = (\mathrm{id} + (\mathrm{e}^{\alpha} - 1)\, p)\left(\mathrm{id} + \left(\mathrm{e}^{\beta} - 1\right) q\right) = \mathrm{id} + (\mathrm{e}^{\alpha} - 1)\, p + \left(\mathrm{e}^{\beta} - 1\right) q$$

Comme $p + q = \mathrm{id}$, on conclut

$$\boxed{\exp(\alpha p + \beta q) = \mathrm{e}^{\alpha} p + \mathrm{e}^{\beta} q}$$

Exercice 5 (**)

Calculer e^{A} dans les cas suivants :

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Corrigé : 1 . On décompose $\mathrm{A} = \mathrm{I}_3 + \mathrm{N}$ avec $\mathrm{N} = \mathrm{E}_{1,2} + \mathrm{E}_{2,3}$. On trouve $\mathrm{N}^2 = \mathrm{E}_{1,3}$ puis $\mathrm{N}^3 = 0$. Comme les matrices I_3 et N commutent, il vient

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{I}_3 + \mathrm{N}} = \mathrm{e}^{\mathrm{I}_3}\mathrm{e}^{\mathrm{N}} = \mathrm{e}\left(\mathrm{I}_3 + \mathrm{N} + \frac{\mathrm{N}^2}{2}\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{N} = \mathrm{A} - \mathrm{I}_3$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{e}\,\frac{\mathrm{A}^2 + \mathrm{I}_3}{2}}$$

2. On trouve $\chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X} - 1)^2$ qui est annulateur de A d'après le théorème de Cayley-Hamilton. On a $\pi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X} - 2)^2$ car A n'est pas I_2. Le reste de la division euclidienne de X^n par $(\mathrm{X} - 1)^2$ (substitution de X par 1 suivi d'une dérivation puis substitution de X par 1 ou utilisation de la formule de Taylor) est

$$\mathrm{R} = n\mathrm{X} + (1 - n)$$

d'où $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{A}^n = n\mathrm{A} + (1 - n)\mathrm{I}_2$$

Par suite $$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{e}\,\mathrm{A}}$$

Variantes : (a) On décompose $\mathrm{A} = \mathrm{I}_2 + \mathrm{A} - \mathrm{I}_2$ puis, par propriété de l'exponentielle matricielle comme les matrices I_2 et $\mathrm{A} - \mathrm{I}_2$ commutent avec $(\mathrm{A} - \mathrm{I}_2)^2 = 0$ (d'après le théorème de Cayley-Hamilton), il vient

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{I}_2}\mathrm{e}^{\mathrm{A} - \mathrm{I}_2} = \mathrm{e}\,(\mathrm{I}_2 + \mathrm{A} - \mathrm{I}_2) = \mathrm{e}\,\mathrm{A}$$

(b) On trigonalise A et on trouve

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{T}\mathrm{P}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

Puis $$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{P}\mathrm{e}^{\mathrm{T}}\mathrm{P}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{T}} = \mathrm{e}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}\,\mathrm{T}$$

On retrouve alors le résultat précédent.

3. D'après le théorème spectral, comme la matrice A est symétrique réelle, elle est diagonalisable et par conséquent π_{A} est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On peut décomposer $\mathrm{A} = \mathrm{I}_3 + \mathrm{J}$ avec J la matrice constituée de 1 ou procéder directement au calcul de χ_{A} avec $\mathrm{C}_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{3} \mathrm{C}_i$ puis $\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j - \mathrm{C}_1$. On trouve $\chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}-4)$ puis $\pi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-4)$. Le reste de la division euclidienne de X^n par $(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-4)$ est

$$\mathrm{R} = \frac{4^n - 1}{3}\mathrm{X} + \frac{4 - 4^n}{3}$$

D'où $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{A}^n = \frac{4^n - 1}{3}\mathrm{A} + \frac{4 - 4^n}{3}\mathrm{I}_3$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}}{3}\mathrm{A} + \frac{4\mathrm{e} - \mathrm{e}^4}{3}\mathrm{I}_3}$$

Variante : On décompose $\mathrm{A} = \mathrm{I}_3 + \mathrm{J}$ avec J la matrice constituée de 1. Comme les matrices I_3 et J commutent, il vient

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{I}_3}\mathrm{e}^{\mathrm{J}} = \mathrm{e}\,\mathrm{e}^{\mathrm{J}}$$

On observe $\mathrm{J}^2 = 3\mathrm{J}$ puis $\mathrm{J}^k = 3^{k-1}\mathrm{J} = 3^{k-1}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3)$ pour tout k entier nul. On obtient

$$\mathrm{e}^{\mathrm{J}} = \mathrm{I}_3 + \frac{\mathrm{e}^3 - 1}{3}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3)$$

et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 6 (**)

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 3

$$x^{(3)} - x'' - x' - 2x = 0 \tag{H}$$

1. Écrire le système différentiel associé à l'équation différentielle (H).
2. Déterminer une expression réelle des solutions de l'équation différentielle (H).
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le triplet $(x(0), x'(0), x''(0))$ pour avoir une solution $t \mapsto x(t)$ bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Corrigé : 1. Soit x solution de (H). On pose $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$. Ainsi, avec $x^{(3)} = x'' + x' + 2x$, on obtient

$$\mathrm{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \\ x^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Le système différentiel associé à (H) s'écrit } \mathrm{X}' = \mathrm{AX} \text{ avec } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

2. Réduisons A. Avec $\mathrm{L}_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{3} \mathrm{L}_i$ puis $\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + 2\mathrm{L}_1$, on trouve

$$\chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{X} & -1 \\ -2 & -1 & \mathrm{X}-1 \end{vmatrix} = (\mathrm{X}-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathrm{X} & -1 \\ -2 & -1 & \mathrm{X}-1 \end{vmatrix} = (\mathrm{X}-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathrm{X} & -1 \\ 0 & 1 & \mathrm{X}+1 \end{vmatrix}$$

Ainsi
$$\begin{aligned}\chi_{\mathrm{A}} &= (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)+1)\\ &= (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1) = (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-j)(\mathrm{X}-\bar{j})\end{aligned}$$

et par conséquent $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) = \{1, j, \bar{j}\}$. Ainsi, la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ admet 3 valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$ et est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$ par condition suffisante. On en déduit que $(t \mapsto \mathrm{e}^{2t}, t \mapsto \mathrm{e}^{jt}, t \mapsto \mathrm{e}^{\bar{j}t})$ forme un base de l'ensemble des solutions vu comme $\mathbb{C}$-ev. Or, si une fonction x vérifie l'équation différentielle, passant à la partie réelle et imaginaire, on trouve que $\mathrm{Re}\, x$ et $\mathrm{Im}\, x$ sont solutions. Ainsi, la famille $(t \mapsto \mathrm{e}^{2t}, t \mapsto \mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{jt}, t \mapsto \mathrm{Im}\,\mathrm{e}^{jt})$ est une famille réelle de solutions, clairement libre et par conséquent

$$\boxed{\exists (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \alpha\mathrm{e}^{2t} + \beta\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \gamma\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)}$$

3. On a
$$\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$

Ainsi, pour x solution de (H), on a
$$x \text{ bornée sur } \mathbb{R}_+ \iff \alpha = 0$$

Puis, avec les formules d'Euler, on obtient
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \alpha\mathrm{e}^{2t} + \lambda\mathrm{e}^{jt} + \mu\mathrm{e}^{\bar{j}t} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\beta - \mathrm{i}\gamma}{2} \qquad \mu = \frac{\beta + \mathrm{i}\gamma}{2}$$

et par dérivation
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x(t) = \alpha\mathrm{e}^{2t} + \lambda\mathrm{e}^{jt} + \mu\mathrm{e}^{\bar{j}t}\\ x'(t) = 2\alpha\mathrm{e}^{2t} + j\lambda\mathrm{e}^{jt} + \bar{j}\mu\mathrm{e}^{\bar{j}t}\\ x''(t) = 4\alpha\mathrm{e}^{2t} + j^{\lambda}\mathrm{e}^{jt} + \bar{j}^2\mu\mathrm{e}^{\bar{j}t}\end{cases}$$

En utilisant les égalités $1 + j + j^2 = 1 + \bar{j} + \bar{j}^2 = 0$, on trouve
$$x(0) + x'(0) + x''(0) = 7\alpha$$

d'où
$$\alpha = 0 \iff x(0) + x'(0) + x''(0) = 0$$

Ainsi $\boxed{\text{Une solution } x \in \mathrm{S_H} \text{ bornée sur } \mathbb{R}_+ \text{ si et seulement si } x(0) + x'(0) + x''(0) = 0.}$

Exercice 7 (*)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}\,\mathrm{M} = 1$. Calculer e^{M}.

Corrigé : On a la relation $\mathrm{M}^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{M}$ puis $\mathrm{M}^k = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})^{k-1}\mathrm{M}$ pour k entier non nul. Ainsi
$$\mathrm{e}^{\mathrm{M}} = \mathrm{I}_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{M}^k}{k!} = \mathrm{I}_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})^{k-1}}{k!}\mathrm{M}$$

On conclut $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{M}} = \mathrm{I}_n + \mathrm{M} \text{ si } \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0 \text{ et } \mathrm{e}^{\mathrm{M}} = \mathrm{I}_n + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})} - 1}{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})}\mathrm{M} \text{ sinon.}}$

Exercice 8 (*)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \mathrm{e}^{\mathrm{B}} = \int_0^1 \mathrm{e}^{s\mathrm{A}}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\mathrm{e}^{(1-s)\mathrm{B}}\,\mathrm{d}s$$

Corrigé : Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$. On observe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{B}}\right] = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{A}\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{B}} + \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}(-\mathrm{B})\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{B}} = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{B}}$$

Ainsi $$\boxed{\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \mathrm{e}^{\mathrm{B}} = \int_0^1 \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{B}}\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 9 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \geqslant \mathrm{N} \qquad \sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{A}^k}{k!} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

Corrigé : Par continuité du déterminant (polynomial en les coefficients de la matrice), on a

$$\det\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \det \mathrm{e}^{\mathrm{A}} \neq 0$$

Par conséquent, on dispose d'un seuil N entier tel que, pour $p \geqslant \mathrm{N}$

$$\left|\det\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}\right) - \det \mathrm{e}^{\mathrm{A}}\right| \leqslant \frac{|\det \mathrm{e}^{\mathrm{A}}|}{2}$$

Par inégalité triangulaire inverse, il vient

$$\forall p \geqslant \mathrm{N} \qquad \left|\det\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}\right)\right| \geqslant \frac{|\det \mathrm{e}^{\mathrm{A}}|}{2} > 0$$

Ainsi $$\boxed{\text{Il existe un seuil N tel que pour } p \geqslant \mathrm{N}\text{, la matrice } \sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{A}^k}{k!} \text{ est inversible.}}$$

Variante : On a $\mathrm{e}^{\mathrm{A}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dispose donc de $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}, r) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Or, on a

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{A}^k}{k!} \xrightarrow[p\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$$

ce qui prouve que la suite $\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}\right)_p$ est à valeurs dans $\mathrm{B}(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}, r)$ donc dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ à partir d'un certain rang.

Exercice 10 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer $\qquad \mathrm{e}^{\mathrm{A}} \in \mathbb{K}[\mathrm{A}]$

Corrigé : L'ensemble $\mathbb{K}[\mathrm{A}]$ est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donc de dimension finie et c'est par conséquent un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Or, la suite $\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}\right)_{\mathrm{N}}$ est convergente à valeurs dans $\mathbb{K}[\mathrm{A}]$ donc sa limite est dans $\mathbb{K}[\mathrm{A}]$, autrement dit

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{A}} \in \mathbb{K}[\mathrm{A}]}$$

Exercice 11 (**)

Montrer $\qquad \forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \det(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) = \exp(\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}))$

L'exponentielle est-elle surjective de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?

Corrigé : Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On se place dans $\mathbb{C}$. Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et T triangulaire supérieure stricte telles que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D} + \mathrm{T}$. Il s'ensuit

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\mathrm{P} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n}) + \mathrm{Q}$$

avec Q triangulaire supérieure stricte. Par conséquent

$$\boxed{\det(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})}}$$

On a $\det(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) > 0$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, la matrice $\mathrm{D} = -\mathrm{E}_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} \mathrm{E}_{i,i}$ vérifiant $\det(\mathrm{D}) = -1$ appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \smallsetminus \exp \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\boxed{\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \subsetneq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

Remarque : Dans $\mathbb{C}$, on a l'égalité $\exp\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\right) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mais la démonstration est plus délicate.

Exercice 12 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et le système différentiel (H) : $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Montrer que $t \mapsto \|\mathrm{X}(t)\|^2$ croît.

Corrigé : On pose $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \|\mathrm{X}(t)\|^2 = \langle \mathrm{X}(t), \mathrm{X}(t) \rangle$

La fonction φ est dérivable comme composée de telles fonctions. Par dérivation, on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(t) = 2\,\langle \mathrm{X}(t), \mathrm{X}'(t) \rangle = 2\,\langle \mathrm{X}(t), \mathrm{AX}(t) \rangle$$

Par définition d'une matrice symétrique positive, on a

$$\forall \mathrm{Y} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \langle \mathrm{Y}, \mathrm{AY} \rangle \geqslant 0$$

On en déduit que φ' est positive et par conséquent

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est croissante.}}$$

Exercice 13 (**)

Soit $\mathrm{A} : t \mapsto \mathrm{A}(t)$ continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{X} : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}'(t) = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t)$$

1. Montrer $\qquad \mathrm{X}(0) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \implies \forall t \in \mathbb{R} \quad \mathrm{X}(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
2. Montrer $\qquad \mathrm{X}(0) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \implies \forall t \in \mathbb{R} \quad \mathrm{X}(t) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$

Corrigé : 1. Posons $\mathrm{Y}(t) = \mathrm{X}(t)^\top \mathrm{X}(t)$ pour t réel. La fonction Y est dérivable et on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{Y}'(t) = \mathrm{X}'(t)^\top \mathrm{X}(t) + \mathrm{X}(t)^\top \mathrm{X}'(t) = \mathrm{X}(t)^\top \left(\mathrm{A}(t)^\top + \mathrm{A}(t)\right) \mathrm{X}(t) = 0$$

Par suite, la fonction Y est constante et $\mathrm{Y}(0) = \mathrm{X}(0)^\top \mathrm{X}(0) = \mathrm{I}_n$. On en déduit

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$$

2. L'application $\det \circ \mathrm{X}$ est continue par composition et par conséquent l'image $\det \circ \mathrm{X}(\mathbb{R})$ est un connexe par arcs. D'après le résultat de la question précédente, on a $\det \circ \mathrm{X}(\mathbb{R}) \subset \{-1, 1\}$ et on sait aussi $\det \circ \mathrm{X}(0) = 1$. On en déduit $\det \circ \mathrm{X}(\mathbb{R}) = \{1\}$, autrement dit

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})}$$

Exercice 14 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible et X solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$. Montrer que X prend ses valeurs dans un hyperplan affine.

Corrigé : On a par continuité du produit matriciel (bilinéaire en dimension finie)

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}} \mathrm{X}_0 = \mathrm{X}_0 + \mathrm{B}(t) \quad \text{avec} \quad \mathrm{B}(t) = \mathrm{A} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k \mathrm{A}^{k-1}}{k!} \right) \mathrm{X}_0$$

et $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{B}(t) \in \operatorname{Im} \mathrm{A} \quad \text{avec} \quad \operatorname{rg} \mathrm{A} \leqslant n - 1$$

Ainsi $$\boxed{\text{La solution X prend ses valeurs dans un hyperplan affine.}}$$

Exercice 15 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$;
2. Toute solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ est de norme $\|\cdot\|$ constante.

Corrigé : Soit X solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \|\mathrm{X}(t)\|^2 = \mathrm{X}(t)^\top \mathrm{X}(t)$$

La fonction φ est dérivable comme composée de telles fonctions. Par dérivation, on trouve

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(t) &= \mathrm{X}'(t)^\top \mathrm{X}(t) + \mathrm{X}(t)^\top \mathrm{X}'(t) \\ &= (\mathrm{AX}(t))^\top \mathrm{X}(t) + \mathrm{X}(t)^\top \mathrm{AX}(t) = \mathrm{X}(t)^\top \left(\mathrm{A}^\top + \mathrm{A}\right) \mathrm{X}(t) \end{aligned}$$

Si $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, alors φ' est nulle donc φ constante et donc l'application $t \mapsto \mathrm{X}(t)$ est de norme constante. Réciproquement, supposons que toute solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ est de norme constante. Soit $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et X la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

On considère l'application φ comme définie précédemment. On a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(t) = X(t)^\top \left(A^\top + A\right) X(t) = 0$$

En particulier $$\varphi'(0) = {X_0}^\top \left(A^\top + A\right) X_0 = 0$$

La matrice $A^\top + A$ est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral. Comme X_0 est quelconque, on peut choisir en particulier $X_0 \neq 0$ tel que $\left(A^\top + A\right) X_0 = \lambda X_0$ avec λ réel et par suite

$${X_0}^\top \left(A^\top + A\right) X_0 = \lambda \underbrace{\|X_0\|^2}_{>0} = 0$$

On en déduit $\lambda = 0$, autrement dit $\mathrm{Sp}\,(A^\top + A) = \{0\}$ d'où $A^\top + A$ semblable à la matrice nulle et donc égale à la matrice nulle. on conclut

$$\boxed{\text{Les deux assertions sont équivalentes.}}$$

Remarque : On peut procéder sans recours au théorème spectral pour la réciproque. On pose $S = A^\top + A$ avec $S = \left(s_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Par une technique de polarisation, on constate

$$\forall (i,j) \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]^2 \qquad s_{i,j} = \frac{1}{4}\left(\langle E_i + E_j, S(E_i + E_j)\rangle - \langle E_i - E_j, S(E_i - E_j)\rangle\right)$$

et on peut choisir $X_0 = E_i + E_j$ ou $E_i - E_j$ avec $(i,j) \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]^2$ dans l'égalité ${X_0}^\top S X_0 = 0$. On en déduit la nullité de S.