Feuille d'exercices n°71

Exercice 1 (**)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Établir

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BA} \iff \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{t(\mathrm{A}+\mathrm{B})} = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}$$

Corrigé : L'implication directe découle de la propriété de l'exponentielle matricielle. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \mathrm{e}^{t(\mathrm{A}+\mathrm{B})} - \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}$$

Supposons que φ est la fonction nulle. On a $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et par dérivation, il vient pour t réel

$$\varphi'(t) = (\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{e}^{t(\mathrm{A}+\mathrm{B})} - \mathrm{A}\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{e}^{t\mathrm{B}} - \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}\mathrm{B}$$

et $$\varphi''(t) = (\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{e}^{t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) - \mathrm{A}^2\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{e}^{t\mathrm{B}} - \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}\mathrm{B}^2$$

Or, on a $\varphi''(0) = 0$ d'où $$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2 - \mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2 = 0$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{AB} = \mathrm{BA} \iff \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{t(\mathrm{A}+\mathrm{B})} = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}}$$

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ muni d'une norme sous-multiplicative.

1. Montrer $$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E} \qquad \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$$
2. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ et $(\mathrm{A}_n)_n \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{A}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{A}$. Établir $$\left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$$
3. Montrer $$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}/n}\mathrm{e}^{\mathrm{B}/n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$$

Corrigé : 1. Avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, on peut écrire

$$\left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n)$$

avec $$\forall (k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \qquad f_k(n) = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}\mathrm{A}^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{\mathrm{A}^k}{k!}$$

On a

$$\forall (k, n)^2 \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Ainsi $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad f_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}$$

et comme l'espace E est muni d'une norme sous-multiplicative, on obtient par récurrence immédiate

$$\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad \|f_k(n)\| \leqslant \frac{\|\mathrm{A}\|^k}{k!}$$

Par convergence normale et donc uniforme de la série $\sum f_k$, il vient par double limite

$$\boxed{\left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^k}{k!} = \mathrm{e}^{\mathrm{A}}}$$

Remarque : On majore $\|f_k(n)\|$ pour k entier non nul car on ne sait pas *a priori* si $\|\mathrm{I}_n\| \leqslant 1$. L'inégalité a lieu pour une norme subordonnée mais pas pour la norme $\|\cdot\|_1$ par exemple.

Variantes : (a) Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. Comme l'espace E est muni d'une norme sous-multiplicative, on a $\|\mathrm{A}^k\| \leqslant \|\mathrm{A}\|^k$ pour tout entier k non nul. Puis, pour n entier non nul

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left[1 - \frac{n!}{n^k(n-k)!}\right] \frac{\mathrm{A}^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}$$

On peut faire démarrer la première somme en $k = 1$ puisque le premier terme est nul. Par ailleurs, on observe l'inégalité

$$\frac{n!}{n^k(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{n \times n \times \ldots \times n} \leqslant 1$$

Par suite $$\|\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left[1 - \frac{n!}{n^k(n-k)!}\right] \frac{\|\mathrm{A}\|^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\|\mathrm{A}\|^k}{k!}$$

Autrement dit $$\|\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n\| \leqslant \mathrm{e}^{\|\mathrm{A}\|} - \left(1 + \frac{\|\mathrm{A}\|}{n}\right)^n \qquad (*)$$

Par encadrement $$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E} \qquad \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$$

(b) On munit E d'une norme sous-multiplicative vérifiant $\|\mathrm{I}_p\| = 1$ (par exemple, une norme d'opérateur). Pour n entier non nul, on a $\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{A}}{n}}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$ par propriété fondamentale de l'exponentielle puis par factorisation de Bernoulli car commutation

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n = \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{A}}{n}}\right)^n - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n = \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{A}}{n}} - \mathrm{I}_p - \frac{\mathrm{A}}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{A}}{n}}\right)^k \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^{n-1-k}$$

Ainsi, par inégalité triangulaire et en utilisant le caractère sous-multiplicatif, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n\| &\leqslant \|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{A}}{n}} - \mathrm{I}_p - \frac{\mathrm{A}}{n}\| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{\|\mathrm{A}\|}{n}}\right)^k \left(1 + \frac{\|\mathrm{A}\|}{n}\right)^{n-1-k} \\
&\leqslant \|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{A}}{n}} - \mathrm{I}_p - \frac{\mathrm{A}}{n}\| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{\|\mathrm{A}\|}{n}}\right)^k \left(\mathrm{e}^{\frac{\|\mathrm{A}\|}{n}}\right)^{n-1-k} \\
\|\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n\| &\leqslant n\mathrm{e}^{\frac{\|\mathrm{A}\|(n-1)}{n}} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|\mathrm{A}\|^k}{n^k k!} \leqslant n\mathrm{e}^{\|\mathrm{A}\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|\mathrm{A}\|^k}{n^2 k!} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{2\|\mathrm{A}\|}}{n}
\end{aligned}$$

Le résultat suit.

2. Comme précédemment, on écrit

$$\left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(n) \quad \text{avec} \quad \forall (k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \qquad g_k(n) = \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \mathrm{A}_n^k$$

On a $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad g_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}$$

$$\text{et} \qquad \forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad \|g_k(n)\| \leqslant \frac{\mathrm{M}^k}{k!} \quad \text{avec} \quad \mathrm{M} = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} \|\mathrm{A}_n\|$$

Par convergence normale et donc uniforme de la série $\sum g_k$, il vient par double limite

$$\boxed{\left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^k}{k!} = \mathrm{e}^{\mathrm{A}}}$$

Variantes : (a) En appliquant $(*)$ à A_n, on obtient

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}_n} - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Par ailleurs, on sait que l'exponentielle est continue. Par suite

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}_n}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \mathrm{e}^{\mathrm{A}_n} + \mathrm{e}^{\mathrm{A}_n} - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

C'est-à-dire
$$\left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$$

(b) On peut aussi reprendre le résultat de la deuxième variante de la première question qui donne pour n entier non nul

$$\|\mathrm{e}^{\mathrm{A}_n} - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}_n}{n}\right)^n\| \leqslant \frac{2\mathrm{e}^{\|\mathrm{A}_n\|}}{n}$$

et on conclut comme précédemment.

3. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$. On a
$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}/n} = \mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^k}{n^k k!}$$

Par inégalité triangulaire généralisée, la convergence absolue ayant lieu, il vient

$$\|\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^k}{n^k k!}\| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|\mathrm{A}\|^k}{n^k k!} \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|\mathrm{A}\|^k}{k!} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi
$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}/n} = \mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{B}/n} = \mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{B}}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où
$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}/n}\mathrm{e}^{\mathrm{B}/n} = \mathrm{I}_p + \frac{1}{n}\left(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{o}(1)\right)$$

D'après le résultat de la question précédente, on conclut

$$\boxed{\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}/n}\mathrm{e}^{\mathrm{B}/n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}}}$$

Remarque : Ce dernier résultat est connu sous le nom de *formule du produit de Lie*. On peut souligner le fait que le résultat a lieu pour tout couple de matrices (A,B) dans E, même si A et B ne commutent pas.

Exercice 3 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\deg \pi_{\mathrm{A}} = 2$. Montrer que les solutions de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ sont à valeurs dans un plan vectoriel.

Corrigé : Comme $\deg \pi_{\mathrm{A}} = 2$, la famille $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A})$ est une base de $\mathbb{R}[\mathrm{A}]$. Par conséquent

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \qquad \left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{A}^k t^k}{k!}\right) \mathrm{X}_0 \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}_0, \mathrm{AX}_0)$$

Pour X solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$, on a $\mathrm{X}(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0$ pour t réel avec $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'espace $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}_0, \mathrm{AX}_0)$ est de dimension finie et est donc un fermé de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi, pour t réel, faisant tendre $\mathrm{N} \to +\infty$, on trouve par continuité du produit matriciel

$$\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{A}^k t^k}{k!}\right) \mathrm{X}_0 \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0 \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}_0, \mathrm{AX}_0)$$

On conclut $\boxed{\text{Les solutions de } \mathrm{X}' = \mathrm{AX} \text{ sont à valeurs dans un plan vectoriel.}}$

Exercice 4 (***)

Soit n entier non nul et $\mathrm{N} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Comparer $\mathrm{Ker}\,\mathrm{N}$ et $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n)$.

Corrigé : On a clairement $\mathrm{Ker}\,\mathrm{N} \subset \mathrm{Ker}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n)$. En effet, pour $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{N}$, on a $\mathrm{N}^k\mathrm{X} = 0$ d'où, par continuité du produit matriciel

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n)\mathrm{X} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{N}^k}{k!}\right) \mathrm{X} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{N}^k \mathrm{X} = 0$$

Cette égalité a lieu indépendamment de l'hypothèse de nilpotence. Puis, comme l'indice de nilpotence de N est majoré par n, on a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{N}^{k-1}}{k!}\right) \mathrm{N}$$

On dispose de $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{NP} = \mathrm{T}$ triangulaire supérieure stricte. Puis, on a

$$\mathrm{P}^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{N}^{k-1}}{k!}\right) \mathrm{P} = \mathrm{I}_n + \mathrm{T}' \quad \text{avec} \quad \mathrm{T}' = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\mathrm{T}^{k-1}}{k!} \text{ triangulaire supérieure stricte}$$

On en déduit l'inversibilité de $\mathrm{I}_n + \mathrm{T}'$ et donc de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{N}^{k-1}}{k!}$ d'où

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{N}^{k-1}}{k!}\right)^{-1} (\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n) = \mathrm{N}$$

Ainsi $\qquad \mathrm{Ker}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n) \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{N}$

On conclut $\qquad \boxed{\mathrm{Ker}\,\mathrm{N} = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n)}$

Remarques : (a) Sur la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{N}^{k-1}}{k!} = \mathrm{I}_n + \mathrm{N}'$ avec $\displaystyle\mathrm{N}' = \mathrm{N} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\mathrm{N}^{k-2}}{k!}$, on peut aussi observer que N' est nilpotente puisque par commutation, on a $\mathrm{N}'^n = \mathrm{N}^n(\ldots)^n = 0$. Avec l'identité de Bernoulli, on a

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n^n - (-\mathrm{N}')^n = (\mathrm{I}_n + \mathrm{N}') \sum_{k=0}^{n-1} (-\mathrm{N}')^{n-1-k}$$

d'où l'inversibilité de $\mathrm{I}_n + \mathrm{N}'$ sans passer par un argument de réduction.

(b) On pouvait s'épargner le détail de la première inclusion puisqu'on a par continuité du produit matriciel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{N}}-\mathrm{I}_n=\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{N}^{k-1}}{k!}\right)\mathrm{N}=\mathrm{N}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{N}^{k-1}}{k!}\right)$$

qui implique $\operatorname{Ker}\mathrm{N}\subset\operatorname{Ker}(\mathrm{e}^{\mathrm{N}}-\mathrm{I}_n)$ et $\operatorname{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{N}}-\mathrm{I}_n)\subset\operatorname{Im}\mathrm{N}$. Avec l'hypothèse de nilpotence, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{N}}-\mathrm{I}_n=\mathrm{N}(\mathrm{I}_n+\mathrm{N}')$ d'où $\mathrm{N}=(\mathrm{e}^{\mathrm{N}}-\mathrm{I}_n)(\mathrm{I}_n+\mathrm{N}')^{-1}$ ce qui prouve $\operatorname{Im}\mathrm{N}\subset\operatorname{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{N}}-\mathrm{I}_n)$ et donc l'égalité des images et aussi des noyaux pour raison de dimension.

Variante : Soit $f\in\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à N. Les endomorphismes $\mathrm{e}^f-\mathrm{id}$ et f commutent d'où la stabilité de $\operatorname{Ker}(\mathrm{e}^f-\mathrm{id})$. On note $\widetilde{f}$ l'induit par f sur $\operatorname{Ker}(\mathrm{e}^f-\mathrm{id})$. On a $\widetilde{f}$ nilpotent et $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{X}^k}{k!}$ annulateur de $\widetilde{f}$. Notant r son ordre de nilpotence, il s'ensuit que $\pi_{\widetilde{f}}=\mathrm{X}^r$ divise $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{X}^k}{k!}$ d'où $r=1$ et par conséquent $\widetilde{f}=0$ ce qui prouve $\operatorname{Ker}(\mathrm{e}^f-\mathrm{id})\subset\operatorname{Ker}f$.

Exercice 5 (***)

Montrer que l'exponentielle est injective sur l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra utiliser le fait que deux matrices diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables.

Corrigé : On utilisera le résultat classique de diagonalisation simultanée : des matrices diagonalisables qui commutent sont diagonalisables pour une même matrice de passage. Considérons A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisables et telles que $\mathrm{e}^{\mathrm{A}}=\mathrm{e}^{\mathrm{A}}$. Si A et B sont diagonales, le résultat est immédiat par injectivité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ puisque

$$\forall(d_1,\ldots,d_n)\in\mathbb{R}^n\qquad\exp\left[\operatorname{diag}(d_1,\ldots,d_n)\right]=\operatorname{diag}(\mathrm{e}^{d_1},\ldots,\mathrm{e}^{d_n})$$

Dans le cas général, soit $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ telles que $\mathrm{B}=\mathrm{PDP}^{-1}$. On a la propriété

$$\mathrm{e}^{\mathrm{B}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{B}^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}=\mathrm{Pe}^{\mathrm{D}}\mathrm{P}^{-1}$$

Quitte à réordonner les valeurs propres de B, notons $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ les valeurs propres distinctes de B avec $p\leqslant n$ et notons $\mathrm{Q}=\sum_{i=1}^{d}\lambda_i\mathrm{L}_i$ avec les L_i polynômes de Lagrange définis par

$$\forall i\in[\![1\,;\,d]\!]\qquad\mathrm{L}_i=\prod_{j\in[\![1\,;\,d]\!]\smallsetminus\{i\}}\frac{\mathrm{X}-\mathrm{e}^{\lambda_j}}{\mathrm{e}^{\lambda_i}-\mathrm{e}^{\lambda_j}}$$

Par construction de Q, on a

$$\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{D}})=\mathrm{D}\quad\text{puis}\quad\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{B}})=\mathrm{PQ}(\mathrm{e}^{\mathrm{D}})\mathrm{P}^{-1}=\mathrm{B}$$

Comme A commute avec $\mathrm{e}^{\mathrm{A}}=\mathrm{e}^{\mathrm{B}}$ et comme $\mathrm{B}=\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{B}})$ avec $\mathrm{Q}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, il s'ensuit que A commute avec B. Ainsi, il existe $\mathrm{R}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que RAR^{-1} et RBR^{-1} soient diagonales. Par suite

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}}=\mathrm{e}^{\mathrm{B}}\quad\Longrightarrow\quad\mathrm{Re}^{\mathrm{A}}\mathrm{R}^{-1}=\exp(\mathrm{RAR}^{-1})=\exp(\mathrm{RBR}^{-1})=\mathrm{Re}^{\mathrm{B}}\mathrm{R}^{-1}$$

ce qui nous ramène au cas de deux matrices diagonales d'où le résultat. Ainsi

$$\boxed{\text{L'exponentielle est injective sur l'ensemble des matrices diagonalisables de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Variante : On peut éviter le recours au résultat de diagonalisation simultanée. Le polynôme Q précédemment construit l'est uniquement à partir du spectre de e^{B} puisqu'en posant $\mu_i=\mathrm{e}^{\lambda_i}$ pour $i\in[\![1\,;\,p]\!]$,

$$\mathrm{Q} = \sum_{i=1}^{p} \ln(\mu_i)\mathrm{L}_i \quad \text{avec} \quad \mathrm{Sp}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{B}}) = \{\mu_i, i \in [\![1\,;\,p]\!]\}$$

et on a montré $\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{B}}) = \mathrm{B}$. Comme $\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{B}}$ qui ont donc même spectre, pour les mêmes raisons, on trouve $\mathrm{A} = \mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{A}})$ et l'égalité $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ s'ensuit.

Exercice 6 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec χ_{A} scindé sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Montrer

$$\mathrm{A} \text{ diagonalisable} \iff \mathrm{e}^{\mathrm{A}} \text{ diagonalisable}$$

L'équivalence a-t-elle lieu sans l'hypothèse χ_{A} scindé ?

Corrigé : Supposons A diagonalisable. Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et D diagonalisable telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ puis, par continuité du produit matriciel, il vient $\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{Pe}^{\mathrm{D}}\mathrm{P}^{-1}$ avec e^{D} diagonale d'où le sens direct. Supposons e^{A} diagonalisable. Comme χ_{A} est scindé, la matrice A est trigonalisable donc il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1 \mathrm{I}_{m_1}, \ldots \lambda_r \mathrm{I}_{m_r})$ et $\mathrm{T} = \mathrm{diag}(\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_r)$ avec les T_i triangulaires supérieures strictes telles que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D} + \mathrm{T}$ ce qui équivaut à $\mathrm{A} = \mathrm{B} + \mathrm{N}$ avec $\mathrm{B} = \mathrm{PDP}^{-1}$ et $\mathrm{N} = \mathrm{PTP}^{-1}$. On a B diagonalisable, N nilpotente et un produit par blocs montre que $\mathrm{BN} = \mathrm{NB}$. Par propriété de l'exponentielle matricielle, il vient $\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{N}}$ d'où $\mathrm{e}^{\mathrm{N}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{A}}$. On vérifie sans difficulté que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ et par conséquent

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{B}+\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{A}-\mathrm{B}} = \mathrm{e}^{\mathrm{A}}\mathrm{e}^{-\mathrm{B}}$$

D'après un résultat classique de réduction, des matrices diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables et par conséquent, leur produit est diagonalisable. On en déduit que e^{N} est diagonalisable. Par ailleurs, on a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{N}} = \mathrm{I}_n + \mathrm{NQ}(\mathrm{N}) \quad \text{avec} \quad \mathrm{Q} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{X}^k}{k!}$$

Les matrices N et Q(N) commutent et il en résulte que NQ(N) est nilpotente donc semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. Il s'ensuit $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{N}}) = \{1\}$ d'où e^{N} semblable à I_n donc égale à I_n et par suite $\mathrm{NQ}(\mathrm{N}) = 0$. Le polynôme $\mathrm{Q} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{X}^k}{k!}$ est annulateur de N est on sait que $\pi_{\mathrm{N}} = \mathrm{X}^d$ avec d entier non nul. Comme π_{N} divise Q, il en résulte que $d = 1$ d'où $\mathrm{N} = 0$ ce qui prouve $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{A} \text{ diagonalisable} \iff \mathrm{e}^{\mathrm{A}} \text{ diagonalisable}}$$

Variante : On peut éviter le recours au polynôme minimal. On observe $\mathrm{Q}(\mathrm{N}) = \mathrm{I}_n + \mathrm{M}$ avec M nilpotente puis, d'après l'identité de Bernoulli

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n - (-\mathrm{M})^n = (\mathrm{I}_n + \mathrm{M}) \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{M}^{n-1-k}$$

ce qui prouve l'inversibilité de $\mathrm{I}_n + \mathrm{M}$ et comme $\mathrm{N}(\mathrm{I}_n + \mathrm{M}) = 0$, on trouve $\mathrm{N} = 0$.

Le résultat est faux sans l'hypothèse χ_{A} scindé : pour $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{I}_2$ qui est diagonale et A ne l'est pas puisque χ_{A} n'est pas scindé.

Exercice 7 (****)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'équation différentielle

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \tag{H}$$

Montrer que les solutions de (H) sont bornées sur $\mathbb{R}$ si et seulement si A est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Corrigé : Les solutions de (H) sont de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0$ avec $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Si A est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset \mathrm{i}\mathbb{R}$, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et des réels $\theta_1, \ldots, \theta_n$ tels que $\mathrm{P}-1\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(\mathrm{i}\theta_1, \ldots, \mathrm{i}\theta_n)$. Puis, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0 = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n})\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}_0$$

Ainsi, les fonctions coordonnées de $t \mapsto \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0$ sont combinaisons linéaires de fonctions bornées et sont donc bornées. Supposons désormais que les solutions de (H) sont bornées. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ et $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle telle que $\mathrm{AX}_0 = \lambda\mathrm{X}_0$. On trouve $(t\mathrm{A})^k\mathrm{X}_0 = (t\lambda)^k\mathrm{X}_0$ pour tout k entier d'où $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0 = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{X}_0$ puis

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \|\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0\| = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}\,(\lambda)}\|\mathrm{X}_0\|$$

Le caractère borné des solutions sur $\mathbb{R}$ impose $\mathrm{Re}\,(\lambda) = 0$ d'où $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset \mathrm{i}\mathbb{R}$. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à A. Supposons u non diagonalisable. On a π_u scindé mais pas à racines simples d'où l'existence de $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$ de multiplicité $\alpha \geqslant 2$ dans π_u. On note $\pi_u = (\mathrm{X} - \lambda)^\alpha\mathrm{Q}$ avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Sur $\mathrm{F}_\lambda = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^\alpha$ stable par u, on note u_λ l'induit de u sur cet espace et on a $u_\lambda = \lambda\,\mathrm{id}_{\,\mathrm{F}_\lambda} + n_\lambda$ avec n_λ un endomorphisme de F_λ nilpotent d'indice de nilpotence égal à α puisque si cet indice était $< \alpha$, on aurait $(\mathrm{X} - \lambda)^{\alpha-1}\mathrm{Q}$ annulateur de u en utilisant la décomposition résultant du lemme des noyaux $\mathrm{E} = \mathrm{F}_\lambda \oplus \mathrm{Ker}\ \mathrm{Q}(u)$ ce qui contredirait la minimalité de π_u. On choisit $x \in \mathrm{F}_\lambda$ tel que $n_\lambda^{\alpha-1}(x) \neq 0$. Sans difficulté, la famille $(n_\lambda^{\alpha-2}(x), n_\lambda^{\alpha-1}(x))$ est libre et on a, notant $\lambda = \mathrm{i}\theta$ avec θ réel

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{tu}(n_\lambda^{\alpha-2}(x)) = \mathrm{e}^{t\lambda\,\mathrm{id}_{\,\mathrm{F}_\lambda} + tn_\lambda}(n_\lambda^{\alpha-2}(x)) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta t}(n_\lambda^{\alpha-2}(x) + tn_\lambda^{\alpha-1}(x))$$

La composante portée par $n_\lambda^{\alpha-1}(x)$ est non bornée ce qui est impossible. On conclut

$$\boxed{\text{Les solutions de (H) sont bornées sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si A est diagonalisable avec } \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset \mathrm{i}\mathbb{R}.}$$

Exercice 8 (****)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'équation différentielle

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \tag{H}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour avoir

$$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{S}_\mathrm{H} \qquad \mathrm{X}(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Corrigé : On a $\mathrm{X}(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0$ pour tout t réel avec $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ et $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $\mathrm{X}_0 \neq 0$ tel que $\mathrm{AX}_0 = \lambda\mathrm{X}_0$. Par continuité du produit matriciel, on a

$$\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0 = \lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{t^k\mathrm{A}^k}{k!}\right)\mathrm{X}_0 = \lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{t^k\lambda^k\mathrm{X}_0}{k!}\right) = \lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{(t\lambda)^k}{k!}\right)\mathrm{X}_0 = \mathrm{e}^{t\lambda}\mathrm{X}_0$$

Comme une des composantes de X_0 est non nulle, on obtient

$$\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0 \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{t\lambda} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Comme $\left|e^{t\lambda}\right| = e^{t\,\mathrm{Re}\,(\lambda)}$ pour t réel, il s'ensuit que $\mathrm{Re}\,(\lambda) < 0$. Réciproquement, on suppose que $\mathrm{Re}\,(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$. On note $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qu'on munit de la norme $\|\mathrm{M}\|_1 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}|$ pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Il s'agit d'une norme d'algèbre qui vérifie, à l'instar de la norme subordonnée, l'inégalité $\|\mathrm{MX}\|_1 \leqslant \|\mathrm{M}\|_1\|\mathrm{X}\|_1$ pour $(\mathrm{M},\mathrm{X}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. D'après les théorèmes de d'Alembert-Gauss et de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique χ_{A} est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et annulateur de A. Ainsi, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale par blocs de la forme

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(\lambda_1\mathrm{I}_{m_1} + \mathrm{T}_1, \ldots, \lambda_r\mathrm{I}_{m_r} + \mathrm{T}_r)$$

avec les $\mathrm{T}_i \in \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{C})$ triangulaires supérieures strictes et donc nilpotentes. Posons

$$\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1\mathrm{I}_{m_1}, \ldots, \lambda_r\mathrm{I}_{m_r}) \quad \text{et} \quad \mathrm{N} = \mathrm{diag}(\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_r)$$

On a clairement $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D} + \mathrm{N}$ avec N triangulaire supérieure stricte donc nilpotente et un produit par blocs montre sans difficulté $\mathrm{DN} = \mathrm{ND}$. Par suite, notant p l'indice de nilpotence de N, on a par commutation

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad e^{t\mathrm{A}} = \mathrm{P}e^{t(\mathrm{D}+\mathrm{N})}\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}e^{t\mathrm{D}}e^{t\mathrm{N}}\mathrm{P}^{-1}$$

avec
$$e^{t\mathrm{D}} = \mathrm{diag}(e^{t\lambda_1}\mathrm{I}_{m_1}, \ldots, e^{t\lambda_r}\mathrm{I}_{m_r}) \quad \text{et} \quad e^{t\mathrm{N}} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k\mathrm{N}^k}{k!}$$

On trouve
$$\|e^{t\mathrm{D}}\|_1 = \sum_{k=1}^{r} m_k\left|e^{t\lambda_k}\right| = \sum_{k=1}^{r} m_k e^{t\,\mathrm{Re}\,(\lambda_k)} \quad \text{et} \quad \|e^{t\mathrm{N}}\|_1 \leqslant n + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^k\|\mathrm{N}\|^k}{k!}$$

Par croissances comparées, on obtient

$$\|e^{t\mathrm{D}}\|_1\|e^{t\mathrm{N}}\|_1 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Pour $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \|e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0\|_1 = \|\mathrm{P}e^{t\mathrm{D}}e^{t\mathrm{N}}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}_0\|_1 \leqslant \|\mathrm{P}\|_1\|e^{t\mathrm{D}}\|_1\|e^{t\mathrm{N}}\|_1\|\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}_0\|_1$$

et on en déduit donc
$$e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi
$$\boxed{\forall \mathrm{X} \in \mathrm{S_H} \qquad \mathrm{X}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda) < 0}$$

Exercice 9 (****)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'équation différentielle

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \tag{H}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour avoir

$$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{S_H} \qquad \mathrm{X}(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$$

Corrigé : On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ qui est sous-multiplicative et vérifie $\|\mathrm{MX}\|_1 \leqslant \|\mathrm{M}\|_1\|\mathrm{X}\|_1$ pour $(\mathrm{M},\mathrm{X}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On a $\mathrm{X}(t) = e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0$ pour tout t réel avec $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ et $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $\mathrm{X}_0 \neq 0$ tel que $\mathrm{AX}_0 = \lambda\mathrm{X}_0$. Par continuité du produit matriciel, on a

$$e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0 = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{t^k\mathrm{A}^k}{k!}\right)\mathrm{X}_0 = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{t^k\lambda^k\mathrm{X}_0}{k!}\right) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{(t\lambda)^k}{k!}\right)\mathrm{X}_0 = e^{t\lambda}\mathrm{X}_0$$

Comme une des composantes de X_0 est non nulle, on obtient

$$\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0 \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1) \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{t\lambda} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$$

Comme $\left|\mathrm{e}^{t\lambda}\right| = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}\,(\lambda)}$ pour t réel, il s'ensuit que $\mathrm{Re}\,(\lambda) \leqslant 0$. La matrice A est semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs de la forme $\lambda\mathrm{I}_m + \mathrm{N}$ où N est triangulaire supérieure stricte. Un calcul par blocs montre que $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$ est semblable à la matrice formée des blocs $\mathrm{e}^{\lambda t\mathrm{I}_m + t\mathrm{N}} = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{t\mathrm{N}}$ par commutation. On se contente d'étudier le cas d'un bloc, le cas général s'en déduisant puisque si $\mathrm{A} = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}(\lambda\mathrm{I}_{m_\lambda} + \mathrm{N}_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}\mathrm{P}^{-1}$, on a

$$\|\mathrm{A}\|_1 \leqslant \|\mathrm{P}\|_1\|\,\mathrm{diag}(\lambda\mathrm{I}_{m_\lambda} + \mathrm{N}_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}\|_1\|\mathrm{P}^{-1}\|_1$$

et
$$\|\,\mathrm{diag}(\lambda\mathrm{I}_{m_\lambda} + \mathrm{N}_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}\|_1 = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} \|\lambda\mathrm{I}_{m_\lambda} + \mathrm{N}_\lambda\|_1$$

Supposons $\mathrm{Re}\,(\lambda) < 0$. Pour une solution $\mathrm{X} : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{t\mathrm{N}}\mathrm{X}_0$ avec X_0 matrice colonne, on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \|\mathrm{X}(t)\|_1 = \|\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{t\mathrm{N}}\mathrm{X}_0\|_1 \leqslant \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\lambda)t}\|\mathrm{e}^{t\mathrm{N}}\|_1\|\mathrm{X}_0\|_1$$

et $\mathrm{e}^{t\mathrm{N}} = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \dfrac{t^k\mathrm{N}^k}{k!}$ pour t réel puisque l'indice de nilpotence est majoré par m. Ainsi, par croissances comparées, on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \|\mathrm{X}(t)\|_1 \leqslant \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\lambda)t}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k\|\mathrm{N}\|_1^k}{k!}\right)\|\mathrm{X}_0\|_1 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

d'où le caractère borné.

Supposons $\mathrm{Re}\,(\lambda) = 0$, autrement dit $\lambda = \mathrm{i}\theta$ avec θ réel. Soit p l'indice de nilpotence de N. On a $p \geqslant 1$. Supposons $p \geqslant 2$. On dispose de X_0 matrice colonne telle que $\mathrm{N}^{p-1}\mathrm{X}_0 \neq 0$. On vérifie sans difficulté que $(\mathrm{N}^{p-2}\mathrm{X}_0, \mathrm{N}^{p-1}\mathrm{X}_0)$ est libre. On trouve

$$\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{t\mathrm{N}}\mathrm{N}^{p-2}\mathrm{X}_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\theta}(\mathrm{N}^{p-2}\mathrm{X}_0 + t\mathrm{N}^{p-1}\mathrm{X}_0)$$

La composante portée par $\mathrm{N}^{p-1}\mathrm{X}_0$ est non bornée et par conséquent, pour une solution bornée, si $\mathrm{Re}\,(\lambda) = 0$, alors l'indice de nilpotence p est égal à 1, autrement dit $\mathrm{N} = 0$ ce qui prouve que le bloc en question est diagonalisable. La réciproque ne pose pas de difficulté. On conclut

Les solutions de (H) sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$, on a $\mathrm{Re}\,(\lambda) < 0$ ou $\mathrm{Re}\,(\lambda) = 0$ et le bloc correspondant diagonalisable.