

TD+ 06

Équations différentielles linéaires, calcul différentiel

Exercice 1. [Fonction de Liapounov et stabilité]

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe \mathcal{C}^1 . On suppose que $f(0) = 0$ et on note $A = df(0)$. Le but de l'exercice est de comparer le comportement des solutions du système différentiel

$$y' = f(y), \quad y(0) = x$$

à celui des solutions du système linéarisé au voisinage de l'équilibre 0 :

$$z' = Az, \quad z(0) = x$$

On suppose que toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative. On note $(\cdot| \cdot)$ le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne correspondante.

1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A . Montrer qu'il existe un polynôme P tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|e^{tA}x\| \leq P(|t|) \left(\sum_{j=1}^k e^{t\operatorname{Re}(\lambda_j)} \right) \|x\|$$

2. En déduire le comportement de $z(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$.

3. Déduire de 1. que l'intégrale

$$b(x, y) = \int_0^{+\infty} (e^{tA}x | e^{tA}y) dt$$

définit une forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^n , et que la forme quadratique $q : x \mapsto b(x, x)$ (appelée *fonction de Liapounov*) est définie positive (*i.e.* b définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^n).

4. Vérifier l'égalité :

$$(\nabla q(x) | Ax) = 2b(x, Ax) = -\|x\|^2$$

Dans la suite on admet l'existence d'une solution $y(t)$ du problème initial, définie pour tout $t \geq 0$. On note $r(y) = f(y) - Ay$.

5. Vérifier l'égalité :

$$q(y)' = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y))$$

et montrer qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$q(y) \leq \alpha \implies -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \leq -\beta q(y)$$

6. En déduire

$$q(x) < \alpha \implies \forall t \geq 0, q(y(t)) \leq \alpha$$

et finalement :

$$\forall t \geq 0, q(y(t)) \leq e^{-\beta t} q(x)$$

Énoncer le résultat obtenu pour le système différentiel.

Exercice 2. [méthode du gradient]

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^1 , $\alpha > 0$ et $M > 0$ vérifiant :

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2$ (on dit que f est α -elliptique)
- ∇f est M -lipschitzienne : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M \|x - y\|$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $f(x) - f(y) \geq \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\alpha}{2} \|x - y\|^2$.
2. Démontrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [0, 1]$, $f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y) - \frac{\alpha}{2} t(1-t) \|x - y\|^2$.
Démontrer qu'en particulier, f est convexe.
3. Montrer que f admet un unique minimum sur \mathbb{R}^n , que l'on nommera x^* .

4. Soit $\rho > 0$. On définit la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et pour tout k dans \mathbb{N} , $x_{k+1} = x_k - \rho \nabla f(x_k)$. Cette méthode est appelée méthode du gradient à pas constant.
- Illustrer la méthode dans le cas réel.
 - Montrer que sous une condition sur ρ , la suite (x_k) converge vers x^* , et évaluer la vitesse de convergence.

Exercice 3. [fonctions harmoniques]

On dit qu'une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 , est harmonique si et seulement si $\Delta f = 0$.

- On dit que f est radiale s'il existe $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$. Déterminer les applications radiales et harmoniques sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- Principe du maximum :
 - Démontrer qu'une fonction f deux fois différentiable qui atteint son maximum en un point (x_0, y_0) d'un ouvert U de \mathbb{R}^2 vérifie $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$.
 - Soit f harmonique, D le disque fermé de centre O de rayon $r > 0$ et C le cercle correspondant. Pour p entier strictement positif, on pose $f_p(x, y) = f(x, y) + \frac{x^2 + y^2}{p}$. En étudiant le maximum de f_p sur D , démontrer que le maximum de f sur D est atteint sur C .
 - En déduire que deux fonctions harmoniques égales sur un cercle sont égales sur le disque délimité par le cercle.

Indications.

- Ex1 :
- Utiliser le lemme des noyaux.
 - Pour la convergence de l'intégrale, penser à Cauchy-Schwarz.
 - On pourra commencer par considérer $q(x + ty)$ pour faire apparaître la différentielle de q .
 - Pour la première égalité, procéder comme en 4.
Pour la suite, traduire la différentiabilité de f en 0 en utilisant la norme définie par q plutôt que $\|\cdot\|$.
 - Raisonner par l'absurde pour établir la première inégalité.
Pour la suite considérer $(e^{\beta t} q(y))'$.
- Ex2 :
- Utiliser le chemin $\gamma : t \mapsto tx + (1-t)y$ qui relie y à x et la formule de l'intégrale le long d'un chemin.
 - Appliquer l'inégalité précédente entre $tx + (1-t)y$ et x , puis entre $tx + (1-t)y$ et y .
 - Utiliser le plus simple des théorèmes de cours sur l'existence d'extremums atteints, et utiliser l'ellipticité pour l'unicité.
 - Montrer par récurrence une convergence géométrique.
- Ex3 :
- Montrer que φ vérifie une équation différentielle que l'on peut résoudre (montrer d'abord que φ' vérifie une équation différentielle du premier ordre).
 - (a) Utiliser la condition de maximum des fonctions réelles et dériver selon une direction.
(b) Utiliser la question précédente et ne pas oublier que f est harmonique.
(c) Si $f = g$ sur un cercle, étudier $f - g$ et $g - f$.