Feuille d'exercices n°44

Exercice 1 (**)

Soit une suite $(f_n)_n \in \mathscr{F}(\mathrm{X},\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f. Montrer que

$$\frac{f_n}{1+f_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CU}} \frac{f}{1+f^2}$$

Corrigé : On pose $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Il en résulte que $|\varphi'(x)| \leqslant 1$ pour tout x réel. D'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction φ est 1-lipschitzienne d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\varphi \circ f_n - \varphi \circ f| \leqslant |f_n - f|$$

Par comparaison, on conclut $\qquad \boxed{\dfrac{f_n}{1+f_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CU}} \dfrac{f}{1+f^2}}$

Exercice 2 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t = 0$ pour tout n entier. Montrer que $f = 0$.

Corrigé : Par linéarité du produit et de l'intégrale, il vient

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \qquad \int_0^1 f(t)\mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

L'idée consiste, d'après le théorème de Weierstrass, à approcher en un certain sens f par P dans cette égalité pour aboutir à $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\|\mathrm{P} - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Puis

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,[f(t) - \mathrm{P}(t) + \mathrm{P}(t)]\,\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)(f-\mathrm{P})(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

Par hypothèse sur f, il s'ensuit

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)(f-\mathrm{P})(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty \|f-\mathrm{P}\|_\infty \leqslant \varepsilon\|f\|_\infty$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on a $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et la fonction f^2 étant continue et positive sur $[\,0\,;1\,]$, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est nulle.}}$$

Variante : Soit $f \in \mathrm{E}$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(\mathrm{P}_n)_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} f$. On vérifie sans difficulté

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|f^2 - f\mathrm{P}_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|f - \mathrm{P}_n\|_\infty = \mathrm{o}(1)$$

ce qui prouve $f\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} f^2$. Il en résulte

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{P}_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, on a $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{P}_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout n entier. Il s'agit donc d'une suite constante nulle et on obtient $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$. On conclut comme précédemment.

Remarque : Notant $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$, on munit l'espace du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ pour $(f,g) \in \mathrm{E}^2$. Dans un espace préhilbertien réel, on peut montrer que pour F sev de E, on a $\mathrm{F}^\perp = \bar{\mathrm{F}}^\perp$. On montre ici que $\mathbb{R}[\mathrm{X}]^\perp = \{0_\mathrm{E}\}$ d'où $\overline{\mathbb{R}[\mathrm{X}]}^\perp = \{0_\mathrm{E}\}$. L'adhérence $\overline{\mathbb{R}[\mathrm{X}]}$ s'entend en sens de la norme euclidienne. D'après le théorème de Weierstrass, on a $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ dense dans E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Or, la norme $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que la norme euclidienne et il s'ensuit que $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est dense dans E pour la norme euclidienne, autrement dit $\overline{\mathbb{R}[\mathrm{X}]} = \mathrm{E}$ d'où le résultat obtenu.

Exercice 3 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ et $(\mathrm{P}_n)_n \in \mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CS}} f$. Montrer

$$\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} f$$

Corrigé : On choisit $0 \leqslant x_0 < \ldots < x_\mathrm{N} \leqslant 1$ et $\mathscr{L} = (\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant \mathrm{N}}$ la base de polynômes de Lagrange associée, *i.e.* on a $\mathrm{L}_i \in \mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$ pour tout $i \in [\![\,0\,;\mathrm{N}\,]\!]$ et $\mathrm{L}_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $0 \leqslant i,j \leqslant \mathrm{N}$. La décomposition de P_n dans $\mathscr{L}$ s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_n = \sum_{i=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}_n(x_i)\mathrm{L}_i$$

Les suites coordonnées de $(\mathrm{P}_n)_n$ convergent par convergence simple de $(\mathrm{P}_n)_n$. Ainsi, la suite $(\mathrm{P}_n)_n$ converge vers $\displaystyle\sum_{i=0}^{\mathrm{N}} f(x_i)\mathrm{L}_i$ pour la norme $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{L}}$ et comme celle-ci est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\infty,[\,0\,;1\,]}$ sur l'espace de dimension finie $\mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$, on en déduit que

$$\|\mathrm{P}_n - \sum_{i=0}^{\mathrm{N}} f(x_i)\mathrm{L}_i\|_{\infty,[\,0\,;1\,]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

La convergence uniforme implique la convergence simple d'où $f = \displaystyle\sum_{i=0}^{\mathrm{N}} f(x_i)\mathrm{L}_i$ par unicité de la limite pour la convergence simple. On conclut

$$\boxed{\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} f \quad \text{avec} \quad f = \sum_{i=0}^{\mathrm{N}} f(x_i)\mathrm{L}_i}$$

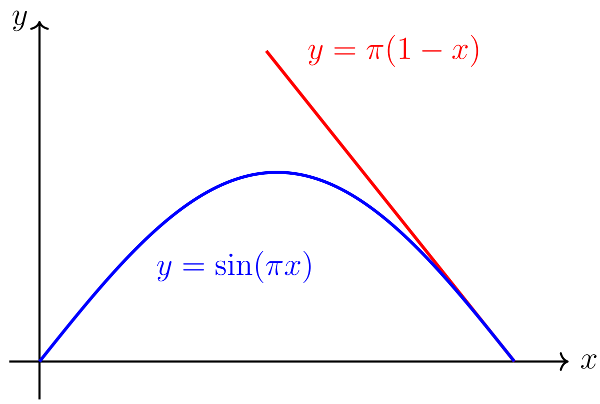
Exercice 4 (**)

On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n(x) = x^n \sin(\pi x)$

Étudier le mode de convergence de la suite $(f_n)_n$.

Corrigé : On a $f_n(1) = 0$ pour n entier et $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour tout $x \in [\,0\,;1\,[$. Ainsi, la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle. Par concavité, on a

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \sin(\pi x) \leqslant \pi(1-x)$$



Il s'ensuit $\quad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant g_n(x) \quad$ avec $\quad g_n(x) = \pi x^n (1-x)$

Après étude de fonction, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|g_n\|_\infty = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{\pi}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi \mathrm{e}^{-1}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On conclut $\qquad \boxed{\text{La suite } (f_n)_n \text{ converge uniformément vers la fonction nulle.}}$

Exercice 5 (***)

On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \sin(x)^n \cos(x)$

Étudier le mode de convergence de la suite $(f_n)_n$.

Corrigé : Si $x \notin \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, on a $|\sin(x)| < 1$ d'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Si $x \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, on a $\cos(x) = 0$ d'où $f_n(x) = 0$. Ainsi, la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle. Des tentatives pour établir la non convergence uniforme ne sont pas fructueuses. La fonction $|f_n|$ est π-périodique et on a de plus $|f_n(x)| = |f_n(\pi - x)|$ pour x réel. On peut donc restreindre l'étude sur $\left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right]$ et par dérivation

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right] \qquad f_n'(x) &= n\sin(x)^{n-1}\cos(x)^2 - \sin(x)^{n+1} \\ &= \sin(x)^{n-1}\left(n\cos(x)^2 - \sin(x)^2\right) = \sin(x)^{n-1}\left((n+1)\cos(x)^2 - 1\right) \end{aligned}$$

d'où $$\forall x \in \left]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right[\qquad f_n'(x) = 0 \iff x = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

Comme la fonction $|f_n|$ n'atteint pas son maximum en 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, on en déduit

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \left| f_n\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

On conclut $\boxed{\text{La suite } (f_n)_n \text{ converge uniformément vers la fonction nulle.}}$

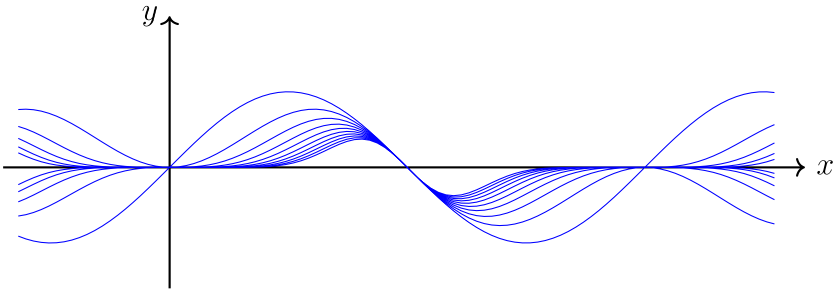


FIGURE 1 – Suite des graphes de f_n

Exercice 6 (***)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[\,0\,;n\,]}(x)$$

Étudier le mode de convergence de la suite $(f_n)_n$.

Corrigé : On a $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-x}$ pour $x \geqslant 0$. L'inégalité de concavité $\ln(1+u) \leqslant u$ pour u réel donne

$$\forall x \in [\,0\,;n\,[\qquad |f_n(x) - f(x)| = \mathrm{e}^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-x}\left(1 - \mathrm{e}^{x + n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}\right)$$

On pose $$g_n(x) = x + n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$$

On a $g \in \mathscr{C}^1([\,0\,;n\,[\,,\mathbb{R})$ et $g_n'(x) = \dfrac{-x/n}{1-x/n}$ pour $x \in [\,0\,;n\,[$. Ainsi, la fonction g_n décroît donc $1 - \exp \circ g_n$ croît. On obtient

$$\forall x \in [\,\sqrt{n}\,;n\,[\qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$$

et $$\forall x \in [\,0\,;\sqrt{n}\,] \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant 1 - \mathrm{e}^{g_n(\sqrt{n})} = \mathrm{o}(1)$$

Enfin $$\forall x \geqslant n \qquad |f_n(x) - f(x)| = \mathrm{e}^{-n}$$

On conclut $\boxed{\text{La suite } (f_n)_n \text{ converge uniformément vers } x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

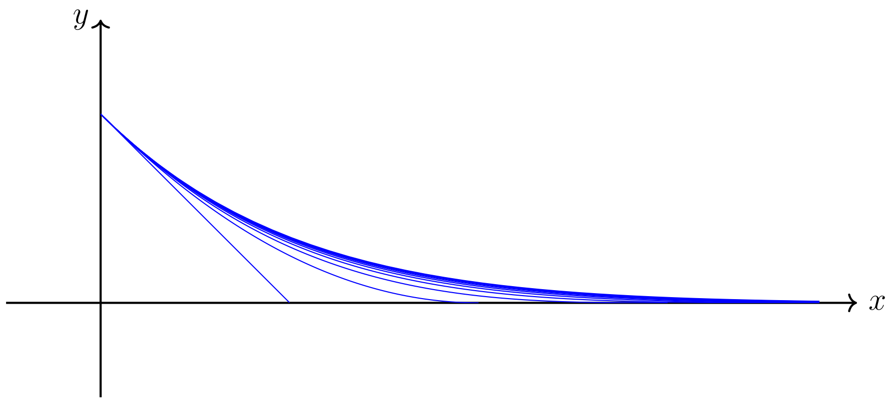


FIGURE 2 – Suite des graphes de f_n

Variante : Soit n entier non nul. Notant $\delta_n = |f_n - f|$, on trouve

$$\forall x \in [\,0\,;n\,] \qquad \delta_n'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{h_n(x)} - 1\right)$$

avec
$$h_n(x) = x + (n-1)\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \quad \text{et} \quad h_n'(x) = \frac{1-x}{n-x}$$

Après étude de variations, on trouve qu'il existe $x_n \geqslant 1$ tel que δ_n atteint son maximum en ce point avec $\delta_n'(x_n) = 0$ d'où $\mathrm{e}^{-x_n} = \left(1 - \dfrac{x_n}{n}\right)^{n-1}$ d'où

$$\delta_n(x_n) = \mathrm{e}^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-x_n}\left(1 - 1 + \frac{x_n}{n}\right) = \frac{x_n \mathrm{e}^{-x_n}}{n}$$

Enfin, la fonction $u \mapsto u\mathrm{e}^{-u}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ (après une étude rapide) par e^{-1} d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant \delta_n(x_n) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$$

et par encadrement, on retrouve la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$.

Exercice 7 (***)

Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions k-lipschitzienne sur $[\,0\,;1\,]$ avec $k > 0$. Montre que si $(u_n)_n$ converge simplement, alors elle converge uniformément sur $[\,0\,;1\,]$.

Corrigé : Notons $u = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Pour $(x,y) \in [\,0\,;1\,]^2$, on a

$$|u(x) - u(y)| = \lim_{n\to+\infty} |u_n(x) - u_n(y)| \quad \text{et} \quad |u_n(x) - u_n(y)| \leqslant k\,|x-y|$$

d'où
$$|u(x) - u(y)| \leqslant k\,|x-y|$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ une subdivision de $[\,0\,;1\,]$ telle que $x_{i+1} - x_i \leqslant \varepsilon/k$ pour $i \in [\![\,0\,;\,p-1\,]\!]$. Il existe N entier tel que pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on a $|u_n(x_i) - u(x_i)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $i \in [\![\,0\,;\,p-1\,]\!]$ (nombre <u>fini</u> de points à contrôler). Pour $x \in [\,0\,;1\,]$, il existe $i \in [\![\,0\,;\,p-1\,]\!]$ tel que $x \in [\,x_i\,;x_{i+1}\,]$. On a pour $n \geqslant \mathrm{N}$

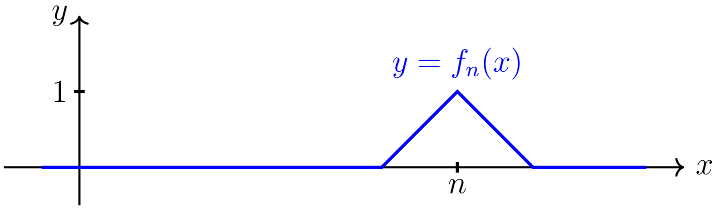
$$\begin{aligned} |u(x) - u_n(x)| &= |u(x) - u(x_i) + u(x_i) - u_n(x_i) + u_n(x_i) - u_n(x)| \\ &\leqslant |u(x) - u(x_i)| + |u(x_i) - u_n(x_i)| + |u_n(x_i) - u_n(x)| \\ |u(x) - u_n(x)| &\leqslant 2k\,|x - x_i| + |u(x_i) - u_n(x_i)| \leqslant 3\varepsilon \end{aligned}$$

Comme le choix de N ne dépend que de ε, on conclut

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CU}} u}$$

Remarque : On peut remplacer $[\,0\,;1\,]$ par un intervalle borné et le résultat a encore lieu. En revanche, sur un intervalle non borné, le résultat est faux. On peut considérer par exemple

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R} \qquad f_n(x) = \max(0, 1-|x-n|)$$



On a $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CS}} f = 0$ mais $f_n(n) = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ ce qui prouve qu'il n'y a pas convergence uniforme.

Exercice 8 (***)

Soit $(\mathrm{P}_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $[\,0\,;1\,]$ par

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{P}_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_{n+1}(x) = \mathrm{P}_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - \mathrm{P}_n^2(x)\right)$$

1. Établir $\quad \forall (n,x) \in \mathbb{N}\times[\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant \sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$
2. En déduire que $(\mathrm{P}_n)_n$ converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[\,0\,;1\,]$.
3. Construire une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers $x \mapsto |x|$ sur $[\,-1\,;1\,]$.

Corrigé : 1. Soit n entier et $x \in [\,0\,;1\,]$. On observe

$$\sqrt{x} - \mathrm{P}_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x))\left(1 - \frac{\sqrt{x}+\mathrm{P}_n(x)}{2}\right)$$

On procède ensuite par récurrence. Pour n entier, on note

$$\mathscr{P}(n): \quad \forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant \sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

L'initialisation $\mathscr{P}(0)$ est immédiate. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour n entier fixé. Pour $x \in [\,0\,;1\,]$, on a $0 \leqslant \mathrm{P}_n(x) \leqslant \sqrt{x}$ par hypothèse de récurrence et par suite

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant 1 - \sqrt{x} \leqslant 1 - \frac{\sqrt{x}+\mathrm{P}_n(x)}{2} \leqslant 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}$$

d'où $\qquad \forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant \sqrt{x} - \mathrm{P}_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n+1}$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times[\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant \sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^n}$

2. Posons $\varphi_n(u) = u\left(1-\dfrac{u}{2}\right)^n$ pour $u \in [\,0\,;1\,]$ et n entier. Après étude de fonction, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|\varphi_n\|_\infty = \varphi_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\mathrm{e}^{-1}}{n}$$

Avec l'encadrement de la question précédente, on a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times[\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant \sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x) \leqslant \|\varphi_n\|_n$$

Ainsi $\boxed{\text{La suite } (\mathrm{P}_n)_n \text{ converge uniformément vers la fonction } \sqrt{\cdot}.}$

3. Pour n entier, on choisit Q_n défini par $\mathrm{Q}_n(x) = \mathrm{P}_n(x^2)$ pour $x \in [\,-1\,;1\,]$. Par récurrence immédiate, la suite $(\mathrm{P}_n)_n$ est une suite de fonctions polynomiales et par conséquent $(\mathrm{Q}_n)_n$ également. Puis, on a

$$\underset{x\in[\,-1\,;1\,]}{\mathrm{Sup}} |\mathrm{Q}_n(x) - |x|| = \underset{x\in[\,-1\,;1\,]}{\mathrm{Sup}} \left|\mathrm{P}_n(x^2) - \sqrt{x^2}\right| = \underset{u\in[\,0\,;1\,]}{\mathrm{Sup}} |\mathrm{P}_n(u) - \sqrt{u}|$$

D'après le résultat de la question précédente, on conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La suite } (\mathrm{Q}_n)_n \text{ est une suite de fonctions polynomiales}\\ \text{qui converge uniformément vers la fonction } |\cdot|.\end{array}}$$

Remarque : Cet exercice est sans doute inspirée par la méthode de Newton appliquée à la fonction $f : u \mapsto u - x^2$. On définit la suite $(u_n)_n$ avec $u_0 \in [\,\sqrt{x}\,;1\,]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{x-u_n^2}{2u_n}$$

On vérifie $f([\,\sqrt{x}\,;1\,]) \subset [\,\sqrt{x}\,;1\,]$. On en déduit $\sqrt{x} \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout n entier et par suite

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{x-u_n^2}{2u_n} \geqslant u_n + \frac{x-u_n^2}{2}$$

ce qui motive l'étude de la suite de fonctions étudiée dans l'exercice.

Exercice 9 (***)

On définit la suite de fonctions $(u_n)_n$ sur $[\,0\,;1\,]$ par

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer $\quad \forall (x,n) \in [\,0\,;1\,]\times\mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
2. En déduire la convergence simple de $(u_n)_n$.
3. Montrer que $(u_n)_n$ converge uniformément vers u non nulle solution de $u'(x) = u(x-x^2)$.

Corrigé : 1. On remarque tout d'abord qu'on a bien $t - t^2 = t(1-t) \in [\,0\,;1\,]$ pour $t \in [\,0\,;1\,]$. Pour n entier, on note

$$\mathscr{P}(n) : \quad \forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

On a $u_1(x) = 1 + x$ d'où $0 \leqslant u_1(x) - u_0(x) = x$ pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$ ce qui prouve $\mathscr{P}(1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour n entier fixé. Pour $x \in [\,0\,;1\,]$, on a par linéarité de l'intégrale

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x [u_{n+1}(t-t^2) - u_n(t-t^2)]\,\mathrm{d}t$$

avec $\qquad \forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant u_{n+1}(t-t^2) - u_n(t-t^2) \leqslant \dfrac{(t(1-t))^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$

Ainsi $$0 \leqslant u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

ce qui clôt la récurrence. On a donc

$$\boxed{\forall (x,n) \in [\,0\,;1\,] \times \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}$$

2. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. La série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge (série exponentielle, critère de d'Alembert). Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum [u_{n+1}(x) - u_n(x)]$ converge. Alors, d'après le théorème sur les séries téléscopiques, on en déduit la convergence de la suite $(u_n(x))_n$ autrement

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (u_n)_n \text{ converge simplement.}}$$

3. D'après le théorème fondamental d'intégration, on vérifie par récurrence que la suite $(u_n)_n$ est une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ donc *a fortiori* continues sur $[\,0\,;1\,]$. On a pour n entier

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \sum_{k=n}^{+\infty} [u_{k+1}(x) - u_k(x)] = u(x) - u_n(x) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \mathrm{o}(1)$$

On en déduit la convergence uniforme de $(u_n)_n$ vers u qui est donc continue sur $[\,0\,;1\,]$ comme limite uniforme de telles fonctions. Pour $x \in [\,0\,;1\,]$, comme $t - t^2 \in [\,0\,;1\,]$ pour $t \in [\,0\,;1\,]$, il vient

$$\forall t \in [\,0\,;x\,] \qquad |u_n(t-t^2) - u(t-t^2)| \leqslant \|u_n - u\|_\infty$$

Ainsi, par convergence uniforme

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + \int_0^x u(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

Par unicité de la limite, on obtient

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad u(x) = 1 + \int_0^x u(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

On a $u(0) = 1$ et d'après le théorème fondamental d'intégration, on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ converge uniformément vers } u \text{ non nulle solution de } u'(x) = u(x-x^2).}$$

Exercice 10 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$.

1. Étudier le comportement asymptotique de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.
2. En déduire les comportements de de $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. Soit $\varphi \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ et $(a_i)_{i\in[\![\,0\,;\,p\,]\!]}$ une subdivision adaptée à φ avec $\varphi_{|]\,a_j\,;a_{j+1}\,[} = \lambda_j$ scalaire pour tout $j \in [\![\,0\,;\,p-1\,]\!]$. On a pour n entier

$$\int_a^b \varphi(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j \int_{a_j}^{a_{j+1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}n} \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right]_{a_j}^{a_{j+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon/(b-a)$. Par suite

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \left|\int_a^b [f(t)-\varphi(t)]\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b \varphi(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant (b-a)\|f-\varphi\|_\infty + \left|\int_a^b \varphi(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

Il existe N entier tel que $\left|\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$ et on a donc

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon$$

Ainsi
$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Remarque : On peut comprendre intuitivement ce résultat. Quand n est très grand, la période de $t \mapsto \mathrm{e}^{int}$ est très courte et la fonction f « semble » constante sur une période très courte. L'intégrale d'une fonction constante multipliée par $t \mapsto \mathrm{e}^{int}$ est nulle sur une période ce qui explique le phénomène observé. Ce résultat s'intitule *lemme de Lebesgue-Riemann*. Il existe une version « perfusée » de ce résultat où f est supposée de classe $\mathscr{C}^1$: la preuve s'obtient alors par simple intégration par parties.

Variante : On peut établir le résultat par double limite. Soit $(\varphi_k)_k$ à valeurs dans $\mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ telle que $\varphi_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} f$. On pose

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad u_k(n) = \int_a^b \varphi_k(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v(n) = \int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t$$

On a $\quad \forall (k,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad |u_k(n)-v(n)| = \left|\displaystyle\int_a^b [\varphi_k(t)-f(t)]\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\|\varphi_k - f\|_\infty$

d'où $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathrm{CU}} v$. Par double limite, la suite $(v(n))_n$ converge avec

$$v(n) = \lim_{k\to+\infty} u_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lim_{n\to+\infty}\lim_{k\to+\infty} u_k(n) = \lim_{k\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} u_k(n) = 0$$

et on retrouve le résultat annoncé.

2. Considérant partie réelle et imaginaire de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t$ pour n entier, on conclut

$$\boxed{\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Remarque : Les résultats qui précèdent s'étendent sans difficulté au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exercice 11 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,],\mathbb{K})$. Déterminer

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\,|\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : Soit $\alpha \geqslant 0$ et $\lambda > 0$. Le changement de variable $u = \lambda t$ donne

$$\int_0^{\alpha} |\sin(\lambda t)| \;\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\alpha\lambda} |\sin u| \;\mathrm{d}u$$

La fonction $|\sin|$ est π-périodique. On va donc s'efforcer de mettre en valeur une intégrale sur un intervalle de longueur un multiple de π. On pose $n_\lambda = \left\lfloor \dfrac{\lambda\alpha}{\pi} \right\rfloor$. On a

$$\frac{\lambda\alpha}{\pi} - 1 < n_\lambda \leqslant \frac{\lambda\alpha}{\pi} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \lambda\alpha - n_\lambda\pi < \pi$$

D'après la relation de Chasles, comme n_λ est un entier naturel (du fait du choix $\alpha \geqslant 0$), il vient

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^{\alpha\lambda} |\sin u| \;\mathrm{d}u = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n_\lambda - 1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin u| \;\mathrm{d}u + \frac{1}{\lambda}\int_{n_\lambda\pi}^{\lambda\alpha} |\sin u| \;\mathrm{d}u$$

On a

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin u| \;\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} \sin u \,\mathrm{d}u = 2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \int_{n_\lambda\pi}^{\lambda\alpha} |\sin u| \;\mathrm{d}u \leqslant \lambda\alpha - n_\lambda\pi < \pi$$

Ainsi
$$\frac{1}{\lambda}\int_0^{\alpha\lambda} |\sin u| \;\mathrm{d}u \underset{\lambda\to+\infty}{=} \frac{2n_\lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\mathrm{O}(1)$$

D'après un encadrement précédemment établi, on a clairement $n_\lambda \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda\alpha}{\pi}$ et par conséquent

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^{\alpha\lambda} |\sin u| \;\mathrm{d}u \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \frac{2\alpha}{\pi}$$

Si $\alpha \leqslant 0$, le changement de variables $u = -\lambda t$ permet de se ramener à la situation précédente. Pour α, β réels, il vient

$$\int_\alpha^\beta |\sin(\lambda t)| \;\mathrm{d}t = \int_0^\beta |\sin(\lambda t)| \;\mathrm{d}t - \int_0^\alpha |\sin(\lambda t)| \;\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}(\beta - \alpha)$$

Soit $\varphi \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,], \mathbb{K})$ et $(a_i)_{i\in[\![\,0\,;\,n\,]\!]}$ une subdivision de $[\,a\,;b\,]$ adaptée à la fonction φ. Pour tout $i \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$, il existe γ_i scalaire tel que $\varphi_{|\,]\,a_i\,;a_{i+1}\,[} = \gamma_i$. Par suite

$$\int_a^b \varphi(t)\,|\sin(\lambda t)| \;\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i\int_{a_i}^{a_{i+1}} |\sin(\lambda t)| \;\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i(a_{i+1} - a_i) = \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Généralisons ce résultat pour toute fonction continue par morceaux. Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,], \mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,], \mathbb{K})$ tel que $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Il vient par inégalité triangulaire pour $\lambda > 0$

$$\left|\int_a^b f(t)\,|\sin(\lambda t)| \;\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant$$
$$\left|\int_a^b (f-\varphi)(t)\,|\sin(\lambda t)| \;\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b \varphi(t)\,|\sin(\lambda t)| \;\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\frac{2}{\pi}\int_a^b (\varphi - f)(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

Il existe un seuil $\Lambda \geqslant 0$ tel que pour $\lambda \geqslant \Lambda$, on ait

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,|\sin(\lambda t)| \;\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi $$\left|\int_a^b f(t)\,|\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon\left(\left(1+\frac{2}{\pi}\right)(b-a)+1\right)$$

avec un majorant qu'on peut choisir arbitrairement petit. On conclut

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,|\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Variante : On peut établir le résultat par double limite. Soit $(\varphi_n)_n$ à valeurs dans $\mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ telle que $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CU}} f$. On pose

$$\forall (n,\lambda)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+ \qquad u_n(\lambda) = \int_a^b \varphi_n(t)\,|\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v(\lambda) = \int_a^b f(t)\,|\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t$$

On a

$$\forall (n,\lambda)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+ \qquad |u_n(\lambda)-v(\lambda)| = \left|\int_a^b [\varphi_n(t)-f(t)]\,|\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\|\varphi_n - f\|_\infty$$

d'où $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CU}} v$. Par double limite, la fonction v admet une limite en $+\infty$ avec

$$v(\lambda) = \lim_{n\to+\infty} u_n(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \lim_{\lambda\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} u_n(\lambda) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{\lambda\to+\infty} u_n(\lambda) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$$

et par convergence uniforme $\quad \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

On retrouve le résultat annoncé.