

Préparation à l'interrogation n°20

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\ln(1+x)$;
2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$;
3. $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n})} = e^{n(-\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))} = e^{-1 + o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}$.

2 Trigonométrie

1. $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
2. $\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

3 Calcul intégral

1. $\int^x \frac{dt}{t^\alpha}$ avec $\alpha \neq 1$;
2. $\int^x \frac{dt}{1-t^2}$;
3. $\int^x \frac{dt}{a^2+t^2}$ avec $a \neq 0$;

4 Réduction

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

1. On a

$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable} &\iff E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) \\ &\iff \dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \\ &\iff \chi_u \text{ scindé et } \forall \lambda \in \text{Sp}(u) \quad \dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u) \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable} &\iff \pi_u \text{ scindé à racines simples} \\ &\iff \exists P \in \mathbb{K}[X] \text{ scindé à racines simples et annulateur de } u \end{aligned}$$

5 Suites et séries de fonctions

1. Théorème de convergence dominée ;
2. Théorème d'intégration terme à terme ;
3. Théorème de double limite pour une série de fonctions ;
4. Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ pour une série de fonctions.

6 Exercices types

1. Fonction Γ : relation fonctionnelle, régularité $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$;
2. Intégrales de Bertrand ;
3. Polynôme caractéristique d'une matrice compagne ;
4. Inégalité arithmético-géométrique ;
5. La norme subordonnée est une norme sous-multiplicative ;
6. Compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$;
7. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
8. Fermeture de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7 Exercice type

Montrer qu'une union de deux sous-groupes de G est un sous-groupe si et seulement si l'un contient l'autre.

Corrigé : 1. Soit G un groupe et H_1, H_2 deux sous-groupes. Supposons qu'il existe $a \in H_1 \setminus H_2$. Soit $b \in H_2$. On a $a \star b \in H_1 \cup H_2$, autrement dit $a \star b \in H_1$ ou $a \star b \in H_2$. Si $a \star b \in H_2$, alors $(a \star b) \star b^{-1} = a \in H_2$ ce qui est exclu. Il s'ensuit que $a \star b \in H_1$ et par suite $a^{-1} \star (a \star b) = b \in H_1$ ce qui prouve $H_2 \subset H_1$. Si un tel a n'existe pas, alors $H_1 \subset H_2$. On conclut

Une union de deux sous-groupes est un sous-groupe si et seulement si l'un contient l'autre.

8 Questions de cours

Groupes, développements en série entière usuels, graphes usuels.