

Feuille d'exercices n°82

Exercice 1 (*)

Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que

$$\forall (x, y) \in A^2 \quad (x + y)^2 = x^2 + y^2$$

Montrer que l'anneau est commutatif

Exercice 2 (*)

On pose $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$

1. Montrer que le triple $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif.
2. Déterminer $U(\mathbb{Z}[i])$. On pourra considérer l'application $N : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto z\bar{z}$.
3. Déterminer le *corps des fractions* de $\mathbb{Z}[i]$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\left\{ \frac{u}{v}, (u, v) \in \mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \right\}$$

Exercice 3 (*)

Décrire les morphismes d'anneaux $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tels que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 (*)

Un corps $(\mathbb{K}, \times, +)$ est dit *algébriquement clos* si tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré supérieur ou égal à un admet une racine dans $\mathbb{K}$.

1. Déterminer parmi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les corps algébriquement clos.
2. Un corps fini peut-il être algébriquement clos ?

Exercice 5 (*)

Un *morphisme de corps* est un morphisme d'anneaux entre deux corps (commutatifs, conformément au programme). Montrer qu'un tel morphisme est injectif.

Exercice 6 (**)

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ muni des opérations $+$ et $\times$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +, \times)$ est un anneau commutatif.
2. Déterminer le plus petit corps inclus dans $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Exercice 7 (**)

Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Exercice 8 ()**

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps. Montrons qu'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré n entier admet au plus n racines distinctes.

Exercice 9 ()**

Montrer que les anneaux $(\mathbb{Z}^n, +, \times)$ avec n entier non nul sont deux à deux non isomorphes.

Exercice 10 ()**

Soit $(A, +, \times)$ un anneau non commutatif et $a \in A$ qui possède un inverse à droite et un seul. Montrer que a possède un inverse à gauche.