

Feuille d'exercices n°83

Exercice 1 (**)

Soit I un idéal d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$. On définit le *radical* de I noté $R(I)$ par

$$R(I) = \{x \in A \mid \exists k \in \mathbb{N}^* : x^k \in I\}$$

1. Montrer que $R(I)$ est un idéal de A contenant I .
2. On suppose $A = \mathbb{Z}$. Déterminer l'ensemble des entiers n non nuls tels que $R(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$.

Exercice 2 (***)

On note $\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^n}, (p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$

l'ensemble des nombres décimaux.

1. Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
2. Montrer que les idéaux de $(\mathbb{D}, +, \times)$ sont de la forme $a\mathbb{D}$ avec $a \in \mathbb{D}$.

Exercice 3 (***)

Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre. On suppose que cet anneau n'a qu'un nombre fini d'idéaux. Montrer que $(A, +, \times)$ est un corps.

Exercice 4 (***)

Soit $n \in \mathbb{N}$ qui n'est pas un carré. On pose

$$A = \{a + b\sqrt{n}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\} \quad \text{et} \quad C = \{\alpha + \beta\sqrt{n}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^2\}$$

1. Montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau et que C est son corps des fractions.
2. Déterminer tous les automorphismes du corps $(C, +, \times)$.

Exercice 5 (***)

Un idéal I d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ est dit *premier* si

$$\forall x, y \in A \quad xy \in I \implies x \in I \quad \text{ou} \quad y \in I$$

1. Décrire les idéaux premiers de $(\mathbb{Z}, +, \times)$.
2. Montrer que si l'anneau $(A, +, \times)$ est commutatif et si tous ses idéaux sont premiers, alors $(A, +, \times)$ est un corps.

Exercice 6 (****)

Déterminer les endomorphismes du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$.