

Feuille d'exercices n°84

Exercice 1 (**)

Un idéal I d'un anneau commutatif A est dit *premier* si

$$\forall x, y \in A \quad xy \in I \implies x \in I \text{ ou } y \in I$$

1. Décrire les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$.
2. Soit A un anneau commutatif, I idéal premier et J, K des idéaux. Montrer que

$$J \cap K = I \implies J = I \text{ ou } K = I$$

Indications : 1. Étudier $p\mathbb{Z}$ avec p composé et p premier.
2. Si $J \cap K = I$, supposer $K \neq I$ et montrer $I = J$.

Exercice 2 (***)

Un anneau A est dit *de Boole* si tout élément $x \in A$ vérifie $x^2 = x$. On considère A un anneau de Boole.

1. Montrer que pour tout $x \in A$, on a $x + x = 0_A$ et que A est commutatif.
2. Soit $(x, y) \in A^2$. Calculer $xy(x + y)$. En déduire que si A possède plus que deux éléments, il n'est pas intègre.

Indications : 1. Pour $(x, y) \in A^2$, considérer $(-x)^2$ puis $(x + y)^2$.
2. Pour la non-intégrité de A , choisir $x = 1_A$ et $y \notin \{0_A, 1_A\}$.

Exercice 3 (****)

On note $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ muni des opérations $(+, \times)$.

1. Montrer que A est un anneau commutatif.
2. Justifier que pour $x \in A$, l'écriture $x = a + b\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ est unique.
3. Pour $x = a + b\sqrt{2} \in A$, on note $N(x) = a^2 - 2b^2$. Vérifier que

$$\forall (x, y) \in A^2 \quad N(xy) = N(x)N(y)$$

4. Montrer que $x \in U(A) \iff N(x) \in \{\pm 1\}$
5. Montrer que $\min U(A) \cap]1; +\infty[= 1 + \sqrt{2}$
6. En déduire $x \in U(A) \cap]0; +\infty[\implies \exists n \in \mathbb{Z} \mid x = (1 + \sqrt{2})^n$
7. Décrire $U(A)$.

- Indications :** 3. Poser $\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{2}], a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$. Vérifier que l'application est bien définie puis écrire N à l'aide de φ .
4. Observer que pour $x \in U(A)$, on a $N(x) \in U(\mathbb{Z})$. Pour la réciproque, utiliser l'écriture de N avec φ .
5. Pour $x \in U(A) \cap]1; +\infty[$, disjoncter les cas $x = a - b\sqrt{2}$, $x = -a + b\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et en déduire une contradiction portant sur $N(x)$ ou $-N(x)$.
6. Justifier l'égalité $]0; +\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [(1 + \sqrt{2})^n; (1 + \sqrt{2})^{n+1}[$ puis pour $x \in U(A) \cap]1; +\infty[$, discuter de $x(1 + \sqrt{2})^{-n}$ avec n entier relatif bien choisi.

Exercice 4 (****)

Soient $\alpha > \beta$ les racines de $P = X^2 - X - 1$. On pose $A = \{x + \alpha y, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$ et l'application $\sigma : A \rightarrow \mathbb{R}, x + \alpha y \mapsto x + \beta y$.

- Montrer que A est un anneau et que σ est un automorphisme de A . Expliciter σ^{-1} .
- On note U l'ensemble des inversibles de A et $N : A \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto z\sigma(z)$.

- Pour $z \in A$, montrer $z \in U \iff |N(z)| = 1$
- Soit $V = U \cap]1; +\infty[$, montrer que si $x + \alpha y \in V$, alors $x \geq 0$ et $y \geq 1$.
- En déduire $V = \{\alpha^n, n \in \mathbb{N}^*\}$

Indications : 1. Vérifier que A est sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$. Justifier que l'application σ est bien définie en prouvant l'unicité de l'écriture d'un élément de A puis déterminer σ^2 en considérant $\alpha\beta$.

- (a) Observer que $N(u) \in \mathbb{Z}$ pour $u \in U$.
- (b) Pour $u \in V$, supposer u de la forme $u = x - \alpha y$ puis $u = -x + \alpha y$ avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ et aboutir à une contradiction sur la valeur de $N(u)$.
- (c) Déterminer α comme élément remarquable de V puis comparer $\{\alpha^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ et V .