

Feuille d'exercices n°73

Exercice 1 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \langle M, J \rangle$ pour tout $M \in E$ avec $J \in E$ matrice constituée de 1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ puis calculer sa différentielle.

Corrigé : On a f linéaire par linéarité en la première variable du produit scalaire d'où

$$f \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad df = f$$

Exercice 2 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \text{Tr}(M^2)$ pour tout $M \in E$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ puis calculer sa différentielle.

Corrigé : L'application f est polynomiale en les coefficients de la matrice d'où

$$f \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$$

Soit $(M, H) \in E^2$. Il n'y a aucune raison *a priori* pour que M et H commutent d'où

$$(M + H)^2 = M^2 + HM + MH + H^2$$

La trace est linéaire donc C -lipschitzienne avec $C \geq 0$ et avec un choix de norme sous multiplicative, la norme $\|\cdot\|_1$ par exemple, il vient

$$|\text{Tr}(H^2)| \leq C\|H\|^2 = o(H)$$

En utilisant la propriété fondamentale de la trace, on obtient donc

$$f(M + H) = f(M) + \ell(H) + o(H) \quad \text{avec} \quad \ell(H) = 2 \text{Tr}(MH)$$

et ℓ est linéaire par linéarité du produit et de la trace. On conclut

$$\forall (M, H) \in E^2 \quad df(M) \cdot H = 2 \text{Tr}(MH)$$

Exercice 3 (**)

Soit $f : E \rightarrow F$ différentiable vérifiant $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$. Montrer que f est linéaire.

Corrigé : On a clairement $f(0_E) = 0_E$ en prenant $\lambda = 0$. Soit $x \in E$. Comme $tx \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0_E$, on a pour t réel

$$tf(x) = f(tx) \underset{t \rightarrow 0}{=} f(0) + df(0) \cdot (tx) + o(t) = t df(0) \cdot x + o(t)$$

d'où

$$f(x) \underset{t \rightarrow 0}{=} df(0) \cdot x + o(1)$$

et faisant tendre $t \rightarrow 0$

$$\forall x \in E \quad f(x) = df(0) \cdot x$$

On conclut

$$f = df(0)$$

Exercice 4 (**)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall P \in E \quad f(P) = \int_0^1 \cos(P(t)) \, dt$$

Montrer que f est différentiable et déterminer sa différentielle.

Corrigé : Les normes sur E sont équivalentes. On choisira la norme qui nous arrange. Soit $(P, H) \in E^2$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\forall (a, h) \in \mathbb{R}^2 \quad |\cos(a + h) - \cos a + h \sin a| \leq \frac{h^2}{2}$$

$$\text{d'où} \quad \forall t \in [0; 1] \quad |\cos(P(t) + H(t)) - \cos P(t) + H(t) \sin P(t)| \leq \frac{H(t)^2}{2}$$

On munit E de la norme $\|\cdot\|_2$. Après intégration et par inégalité triangulaire, il vient

$$\left| f(P + H) - f(P) + \int_0^1 H(t) \sin P(t) \, dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 H(t)^2 \, dt = \frac{1}{2} \|H\|_2^2$$

On a donc

$$\forall H \in E \quad f(P + H) = f(P) + \ell(H) + o(H) \quad \text{avec} \quad \ell(H) = - \int_0^1 H(t) \sin P(t) \, dt$$

L'application ℓ est linéaire par linéarité du produit et de l'intégrale. On conclut

$$\text{L'application } f \text{ est différentiable avec } df(P) \cdot H = - \int_0^1 H(t) \sin P(t) \, dt \text{ pour } (P, H) \in E^2.$$

Remarque : En écrivant $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et en identifiant $f(P) = f(a_0, \dots, a_n)$, on a

$$f(a_0, \dots, a_n) = \int_0^1 \cos \left(\sum_{k=0}^n a_k t^k \right) \, dt$$

En considérant cette écriture comme une intégrale à paramètre, on peut justifier l'existence et la continuité des dérivées partielles avec

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \frac{\partial f}{\partial a_i}(P) = - \int_0^1 t^i \sin \left(\sum_{k=0}^n a_k t^k \right) \, dt$$

On retrouve le même résultat que précédemment mais la rédaction est plus fastidieuse.

Exercice 5 (**)

Soit E euclidien. Déterminer en quels points l'application $\|\cdot\|$ est différentiable et préciser le gradient en ces points.

Corrigé : Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \frac{\|tu\|}{t} = \frac{|t| \|u\|}{t}$$

quantité qui n'admet pas de limite pour $t \rightarrow 0$ ce qui prouve que la norme n'admet de dérivée selon aucun vecteur en 0_E et n'est par conséquent pas différentiable en 0_E . Soit $x \neq 0_E$. Pour $h \in E$, on a

$$\|x + h\| = \sqrt{\|x\|^2 + 2\langle x, h \rangle + \|h\|^2} = \|x\| \sqrt{1 + \frac{2\langle x, h \rangle}{\|x\|^2} + o(h)}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\langle x, h \rangle \leq \|x\| \|h\|$ d'où $\langle x, h \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0$ et $o(\langle x, h \rangle) = o(h)$ d'où

$$\sqrt{1 + \frac{2\langle x, h \rangle}{\|x\|^2} + o(h)} = 1 + \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|^2} + o(h)$$

et par suite
$$\|x + h\| = \|x\| + \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|} + o(h)$$

On conclut

Une norme euclidienne est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ avec $\nabla \|x\| = \frac{x}{\|x\|}$ pour $x \in E \setminus \{0_E\}$.

Variante : Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E . Pour $x \in E$, on écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec les x_i coordonnées de x dans $\mathcal{B}$. Ainsi

$$\forall x \in E \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Comme $x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$ est polynomiale donc différentiable et $u \mapsto \sqrt{u}$ dérivable sur $]0; +\infty[$, on en déduit la différentiabilité de la norme sur $E \setminus \{0_E\}$ puis

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \partial_i \|x\| = \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} = \frac{x_i}{\|x\|}$$

D'où
$$\forall x \in E \setminus \{0_E\} \quad \nabla \|x\| = \sum_{i=1}^n \partial_i \|x\| e_i = \frac{x}{\|x\|}$$

Remarque : En toute rigueur, on devrait noter $\partial_i \| \cdot \| (x)$ et $\nabla \| \cdot \| (x)$ pour $x \in E \setminus \{0_E\}$ et $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Exercice 6 (*)

Soit E euclidien, $f \in \mathcal{C}^1(E, E)$ telle que $df(x) \in \mathcal{O}(E)$ pour tout $x \in E$. Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$$

Corrigé : Soit $(x, y) \in E^2$. On a

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 df(x + t(y - x)) \cdot (y - x) dt$$

Par inégalité triangulaire, on obtient

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \int_0^1 \|df(x + t(y - x)) \cdot (y - x)\| dt$$

Et comme $df(a) \in \mathcal{O}(E)$ pour tout $a \in E$, on conclut

$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$

Exercice 7 (*)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $h = (h_1, \dots, h_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = f(x + th) = f(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n)$$

Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $g'(t)$ pour t réel.

Corrigé : On a $t \mapsto x + th$ de classe $\mathcal{C}^1$ par propriété sur les fonctions vectorielles. Par composition, la fonction $g : f \circ (t \mapsto x + th)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec par dérivation composée

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g'(t) = \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(x + th)$$

Exercice 8 (*)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R})$ et g définie sur $]0; +\infty[\times \mathbb{R}$ par

$$\forall (r, \theta) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R} \quad g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[\times \mathbb{R}$.
2. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f .
3. Exprimer les dérivées partielles de f évaluées en $(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ en fonction de celles de g .

Corrigé : 1. Notons $U =]0; +\infty[\times \mathbb{R}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$. Posons $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2, (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. L'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ puisque ses fonctions coordonnées sont composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et comme $g = f \circ \varphi$, on conclut

$$g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$$

2. Par dérivation composée, on trouve

$$\forall (r, \theta) \in U \quad \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

et $\forall (r, \theta) \in U \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$

3. Pour $(r, \theta) \in U$, on a

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \end{pmatrix} = R(-\theta) \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{pmatrix}$$

d'où $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \end{pmatrix}$

Autrement dit

$$\forall (r, \theta) \in U \quad \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \cos(\theta) \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$$

et $\forall (r, \theta) \in U \quad \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \sin(\theta) \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$

Exercice 9 (*)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Quelles relations existe-t-il entre les dérivées partielles dans les cas suivants :

$$1. \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = f(y, x) \qquad 2. \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = f(x + y, xy)$$

Corrigé : 1. On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dx} [f(x, y)] = \frac{d}{dx} [f(y, x)] = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{d}{dy} [f(x, y)] = \frac{d}{dy} [f(y, x)] = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x)}$$

2. On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dx} [f(x, y)] = \frac{d}{dx} [f(x + y, xy)] = \frac{\partial f}{\partial x}(x + y, xy) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x + y, xy)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{d}{dy} [f(x, y)] = \frac{d}{dy} [f(x + y, xy)] = \frac{\partial f}{\partial x}(x + y, xy) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x + y, xy)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + y, xy) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x + y, xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + y, xy) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x + y, xy) \end{cases}}$$

Exercice 10 (*)

Soit $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} \varphi(t) dt$$

Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.

Corrigé : Soit Φ une primitive de φ . On a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \Phi(x + y) - \Phi(x - y)$$

Or, les applications $(x, y) \mapsto \Phi(x + y)$ et $(x, y) \mapsto \Phi(x - y)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puisqu'elles sont composées de Φ de classe $\mathcal{C}^1$ avec respectivement $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto x - y$ polynomiales donc de classe $\mathcal{C}^1$. Par composition, on conclut

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \varphi(x + y) - \varphi(x - y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi(x + y) + \varphi(x - y)}$$

Exercice 11 (**)

Étudier la continuité, l'existence des dérivées partielles premières et le caractère $\mathcal{C}^1$ des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
1. \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & 3. \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{e^x - e^y}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ e^x & \text{sinon} \end{cases} \\
2. \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & 4. \quad f(x, y) &= \begin{cases} x(1 - y) & \text{si } x \leq y \\ y(1 - x) & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Corrigé : 1. On a $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R})$ en tant que fonction rationnelle bien définie. En séparant $xy^3 = xy \times y^2$ pour x, y réels, il vient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad |f(x, y) - f(0, 0)| \leq |xy| \quad \text{et} \quad |xy| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

Par encadrement, il s'ensuit que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Puis

$$\forall x \neq 0 \quad \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0 \quad \text{et} \quad \forall y \neq 0 \quad \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$$

Par suite, la fonction f admet des dérivées partielles en x et y en $(0, 0)$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Par dérivation, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par inégalité triangulaire et en séparant $y^5 = y \times y^4$ et $y^3 x^2 = y \times x^2 \times y^2$ pour x, y réels, il vient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| \leq 2|y| \quad \text{et} \quad 6|y| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

d'où la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$. Toujours par dérivation, on trouve

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Puis } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right| \leq 3|x| + |x| = 4|x| \quad \text{et} \quad 4|x| \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$$

Ainsi

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

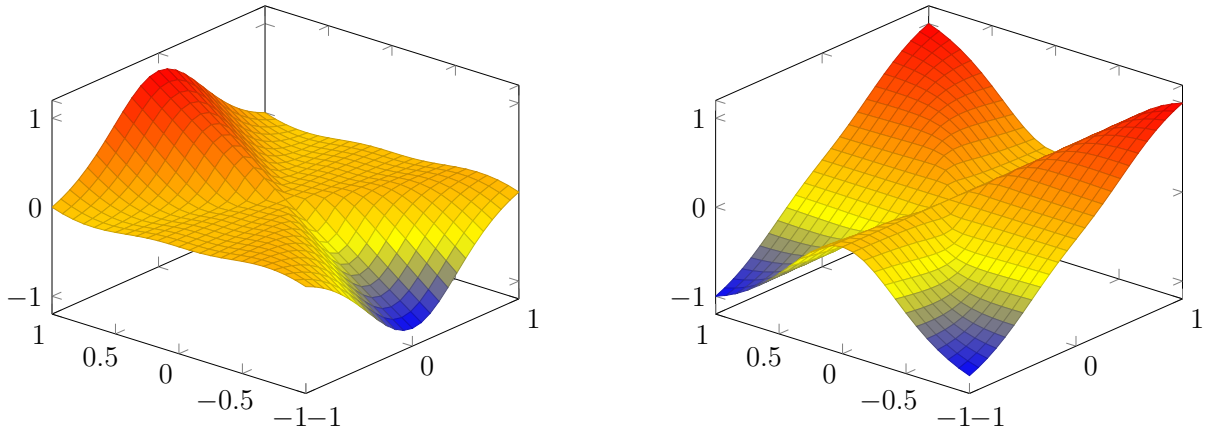


FIGURE 1 – Graphes de $z = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $z = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

2. On a $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R})$ en tant que fonction rationnelle bien définie. Puis

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad |f(x, y) - f(0, 0)| = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} \leq x^2 \quad \text{et} \quad x^2 \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

d'où la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$. Puis

$$\forall x \neq 0 \quad \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0 \quad \text{et} \quad \forall y \neq 0 \quad \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$$

Par suite, la fonction f admet des dérivées partielles en x et y en $(0, 0)$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Par dérivation, il vient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x^6 y}{(x^4 + y^2)^2}$$

D'où
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, x^2) = \frac{1}{2} \not\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

On conclut

$$\boxed{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

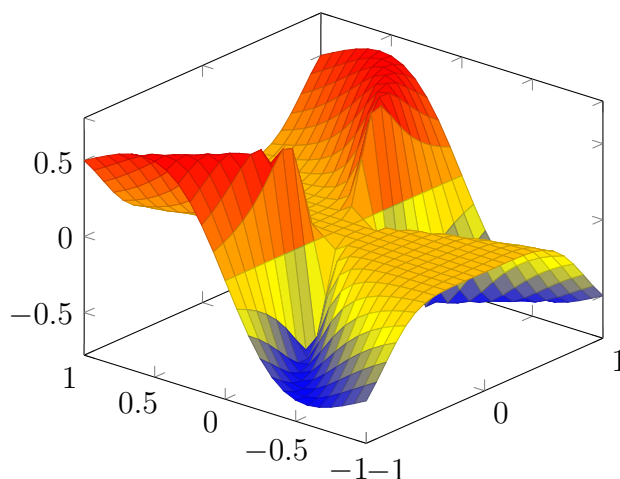


FIGURE 2 – Graphe de $z = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

Remarque : Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^2(y^2 - x^4)}{(x^4 + y^2)^2}$$

Il vient par inégalité triangulaire

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| \leq 2|x| + 2|x| = 4|x| \quad \text{et} \quad 4|x| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

D'où la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$. Il faut donc impérativement examiner $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour conclure négativement. Intuitivement, comme l'exposant en y est plus faible que celui en x au dénominateur, le cas le plus défavorable est celui de la dérivée en partielle en y d'où la pertinence de commencer par cette dérivée partielle.

3. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car développable en série entière avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n!}$$

Or, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = e^x \varphi(y - x)$$

Par composition

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

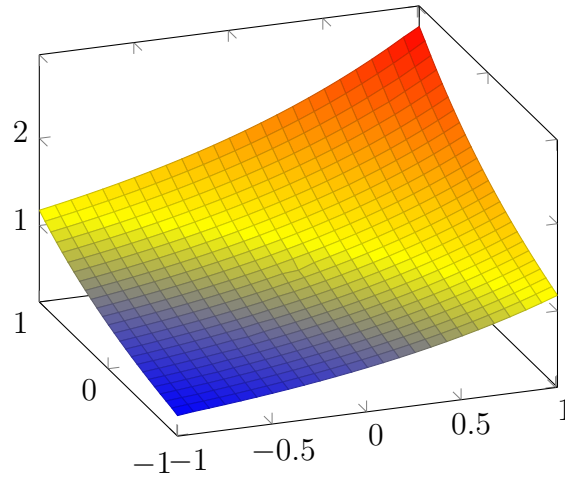


FIGURE 3 – Graphe de $z = f(x, y)$

4. On peut écrire

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \min(x, y) - xy \quad \text{avec} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

On en déduit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ comme composée de telles fonctions. La zone potentiellement « litigieuse » est l'axe d'équation $y = x$, là où la fonction change de régime. Soit a réel. Étudions la dérivée de f en (a, a) selon le vecteur $(1, 0)$. On trouve

$$\forall t > 0 \quad \frac{f(a + t, a) - f(a, a)}{t} = \frac{a(1 - a - t) - a(1 - a)}{t} = -a \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} -a$$

et $\forall t < 0 \quad \frac{f(a + t, a) - f(a, a)}{t} = \frac{(a + t)(1 - a) - a(1 - a)}{t} = 1 - a \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1 - a$

ce qui prouve que f n'admet pas de dérivée en (a, a) selon $(1, 0)$ et n'est donc pas différentiable en ce point. On conclut

$$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

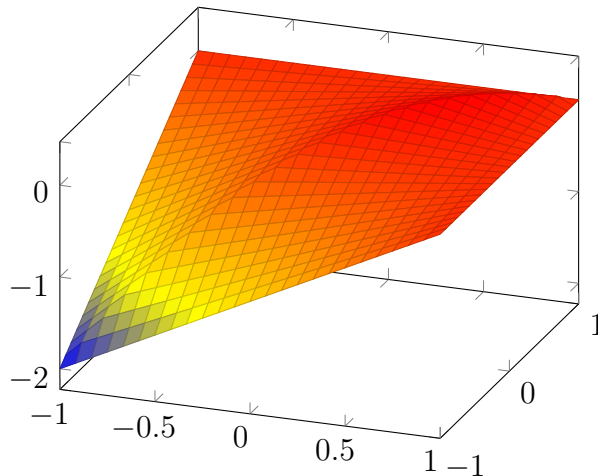


FIGURE 4 – Graphe de $z = f(x, y)$

Exercice 12 (**)

Soit E euclidien, $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ et $a \in E$. On pose

$$\forall x \in E \quad f(x) = \frac{1}{2} \langle u(x), x \rangle - \langle a, x \rangle$$

1. Montrer que f est différentiable et préciser sa différentielle.
2. Étudier les extremums de f .

Corrigé : 1. Pour $(x, h) \in E^2$, on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{1}{2} \langle u(x+h), x+h \rangle - \langle a, x+h \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle u(x), x \rangle + \frac{1}{2} (\langle u(x), h \rangle + \langle u(h), x \rangle) + \frac{1}{2} \langle u(h), h \rangle - \langle a, x \rangle - \langle a, h \rangle \end{aligned}$$

Comme $u \in \mathcal{S}(E)$, on a $\langle u(x), h \rangle = \langle u(h), x \rangle$ pour tout $(x, h) \in E^2$. Puis, l'application u est linéaire sur un espace de dimension finie donc C -lipschitzienne avec $C \geq 0$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle u(h), h \rangle| \leq \|u(h)\| \|h\| \leq C \|h\|^2 = o(h)$$

Puis $\forall (x, h) \in E^2 \quad f(x+h) = f(x) + \langle u(x) - a, h \rangle + o(h)$

Ainsi L'application f est différentiable avec $df(x) \cdot h = \langle u(x) - a, h \rangle$ pour $(x, h) \in E^2$.

Variante : D'après le théorème spectral, on dispose de $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pour $x \in E$, notant $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec les x_i réels, il vient

$$\forall x \in E \quad f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur E car polynomiale. Puis

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \forall x \in E \quad \partial_i f(x) = \lambda_i x_i - a_i$$

d'où $\forall x \in E \quad \nabla f(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i - \sum_{i=1}^n a_i e_i = u(x) - a$

2. Dans l'ouvert E , un extremum de f est nécessairement point critique. Soit $x \in E$. On a

$$df(x) = 0 \iff \forall h \in E \quad \langle u(x) - a, h \rangle = 0 \iff u(x) - a \in E^\perp = \{0_E\} \iff u(x) = a$$

L'endomorphisme u est injectif puisque 0 n'est pas valeur propre et comme il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie, c'est un automorphisme. Ainsi

$$df(x) = 0 \iff x = u^{-1}(a)$$

Puis, en reprenant le calcul effectué à la question précédente, on a en $x_0 = u^{-1}(a)$

$$\forall h \in E \setminus \{0_E\} \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = \underbrace{df(x_0) \cdot h}_{=0} + \frac{1}{2} \langle u(h), h \rangle > 0$$

On conclut

La fonction f admet un unique extremum qui est un minimum global strict en $x_0 = u^{-1}(a)$.

Exercice 13 (**)

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie, U un ouvert convexe de E et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On suppose f convexe, i.e

$$\forall (x, y) \in U^2 \quad \forall \lambda \in [0; 1] \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Montrer que tout point critique de f est un minimum global.

Corrigé : Soit $a \in U$ point critique de f . Par convexité, on a pour tout $x \in U$

$$\forall \lambda \in [0; 1] \quad f((1 - \lambda)a + \lambda x) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(x)$$

d'où $\forall \lambda \in [0; 1] \quad \frac{1}{\lambda} [f(a + \lambda(x - a)) - f(a)] \leq f(x) - f(a)$

Faisant tendre $\lambda \rightarrow 0^+$, il vient

$$\forall x \in U \quad 0 = df(a) \cdot (x - a) \leq f(x) - f(a)$$

Ainsi

Tout point critique de f est un minimum global.