

Feuille d'exercices n°74

Exercice 1 (**)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit F sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad F(x, y) = \frac{f(x^2 + y^2) - f(0)}{x^2 + y^2}$$

1. Montrer que F est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$.
On note encore F ce prolongement.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé : 1. On pose $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(0)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Par construction, la fonction φ est continue et on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$$

Or la fonction $(x, y) \mapsto \varphi(x^2 + y^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de telles fonctions. La fonction $(x, y) \mapsto \varphi(x^2 + y^2)$ est donc le prolongement par continuité de F sur $\mathbb{R}^2$. On conclut

La fonction F se prolonge par continuité en $(x, y) \mapsto \varphi(x^2 + y^2)$.

2. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de telles fonctions. Par dérivation, on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \varphi'(t) = \frac{tf'(t) - (f(t) - f(0))}{t^2}$$

On a $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ ce qui est le cadre typique d'utilisation du théorème de limite de la dérivée. Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$, on a d'après le théorème de Taylor-Young

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} f(0) + f'(0)t + f''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad f'(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} f'(0) + f''(0)t + o(t)$$

Puis, pour $t \neq 0$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t^2} \left[t(f'(0) + f''(0)t) - \left(f'(0)t + f''(0)\frac{t^2}{2} \right) + o(t^2) \right] \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{f''(0)}{2}$$

D'après le théorème de limite de la dérivée, on a $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et par composition, on conclut

$$F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

Exercice 2 (***)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $U = GL_n(\mathbb{R})$ et $f : U \rightarrow E$ définie par $f(M) = M^{-1}$ pour tout $M \in U$.

1. Justifier que U est un ouvert de E .
2. Montrer que f est différentiable et déterminer sa différentielle.
On pourra commencer par une étude en I_n .

Corrigé : 1. L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est polynomiale donc continue. On a $U = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ image réciproque d'un ouvert par une application continue. Ainsi

L'ensemble U est un ouvert de E .

2. On munit E d'une norme sous-multiplicative ce qui garantit $H^2 = o(H)$. Soit $H \in E$ tel que $I_n + H \in U$. On a

$$(I_n + H)(I_n - H) = I_n - H^2 = I_n + o(H)$$

D'où, en multipliant à gauche par $(I_n + H)^{-1}$, comme on a

$$(I_n + H)^{-1}o(H) = \|H\| \underbrace{(I_n + H)^{-1}o(1)}_{=o(1)} = o(H)$$

il vient

$$I_n - H = (I_n + H)^{-1} + o(H)$$

autrement dit

$$f(I_n + H) = f(I_n) - H + o(H)$$

ce qui prouve la différentiabilité de f en I_n avec $df(I_n) \cdot H = -H$ pour tout $H \in E$. Soit $A \in U$ et $H \in E$ tel que $A + H \in U$. On obtient

$$f(A + H) = (A(I_n + A^{-1}H))^{-1} = (I_n + A^{-1}H)^{-1}A^{-1} = (I_n - A^{-1}H + o(H))A^{-1}$$

d'où

$$f(A + H) = f(A) + \ell(H) + o(H) \quad \text{avec} \quad \ell(H) = -A^{-1}HA^{-1}$$

L'application ℓ est linéaire par bilinéarité du produit et on conclut

L'application f est différentiable avec $df(A) \cdot H = -A^{-1}HA^{-1}$ pour tout $(A, H) \in U \times E$.

Remarques : (a) Avec la relation $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Com } A^\top$ pour $A \in U$, on constate que les fonctions coordonnées de f sont des fonctions rationnelles en les coefficients de A d'où le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de f sur U . Isoler la différentielle à partir de cette dernière écriture semble moins commode.

(b) On peut déterminer $df(I_n)$ sans passer par le calcul astucieux de $(I_n + H)(I_n - H)$. Pour $\|H\| < 1$, on a $\|H^N\| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ d'après le caractère sous-multiplicatif de la norme puis par télescopage

$$(I_n + H) \sum_{k=0}^N (-1)^k H^k = I_n + (-1)^N H^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} I_n$$

Comme $\|H^k\| \leq \|H\|^k$ pour k entier, on a la convergence absolue et donc la convergence de $\sum (-1)^k H^k$. Par continuité du produit matriciel, il vient

$$(I_n + H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k = I_n - H + o(H)$$

On retrouve le résultat précédent. On peut aussi déterminer directement les dérivées partielles de f en I_n : pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ et t réel, on a

$$(I_n + tE_{i,j})(I_n - tE_{i,j}) = I_n - t^2 E_{i,j}^2 = I_n + o(t)$$

d'où

$$\partial_{(i,j)} f(I_n) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(I_n + tE_{i,j}) - f(I_n)] = -E_{i,j}$$

et on conclut comme ci-avant.

Exercice 3 (***)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \det(M)$ pour tout $M \in E$.

1. Justifier que $f \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$.
2. Calculer $df(I_n)$ puis $df(A)$ pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire $df(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé : 1. L'application $\det$ est polynomiale en les coefficients de la matrice d'où

$$\boxed{\det \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})}$$

$$2. \text{ On a } \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \frac{1}{t} [\det(I_n + tE_{i,j}) - \det I_n] \xrightarrow{t \rightarrow 0} \delta_{i,j} = df(I_n) \cdot E_{i,j}$$

D'où, par linéarité de $df(I_n)$

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad df(I_n) \cdot H = df(I_n) \cdot \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} h_{i,j} E_{i,j} \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \delta_{i,j} h_{i,j} = \sum_{i=1}^n h_{i,i} = \text{Tr}(H)$$

Ainsi

$$\boxed{df(I_n) = \text{Tr}}$$

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On a pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \det(M + H) &= \det(M) \det(I_n + M^{-1}H) \\ &= \det(M) (1 + \text{Tr}(M^{-1}H) + o(H)) = \det(M) + \det(M) \text{Tr}(M^{-1}H) + o(H) \end{aligned}$$

Avec la relation $M \text{Com}(M)^\top = \det(M) I_n$, on conclut

$$\boxed{\forall M \in GL_n(\mathbb{R}) \quad df(M) = H \mapsto \text{Tr}(\text{Com}(M)^\top H)}$$

3. Les applications $M \mapsto df(M)$ et $M \mapsto (H \mapsto \text{Tr}(\text{Com}(M)^\top H))$ sont continues sur E . En effet, l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ d'où la continuité de $M \mapsto df(M)$ et les fonctions coordonnées de $M \mapsto (H \mapsto \text{Tr}(\text{Com}(M)^\top H))$ sont polynomiales en les coefficients de la matrice (puisque la comatrice l'est). Enfin, ces deux applications coïncident sur l'ouvert dense $GL_n(\mathbb{R})$ et on conclut

$$\boxed{\forall M \in E \quad df(M) = H \mapsto \text{Tr}(\text{Com}(M)^\top H)}$$

Remarque : Le calcul direct fonctionne. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$$

d'où

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \partial_{i,j} f(A) = \sum_{\sigma \in S_n \mid \sigma(i)=j} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{i-1,\sigma(i-1)} a_{i+1,\sigma(i+1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$$

et

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad df(A) \cdot H = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_{i,j} f(A) h_{i,j}$$

On reconnaît dans l'expression de $\partial_{i,j} f(A)$ le cofacteur de A d'indice (i, j) d'où

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad df(A) \cdot H = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \text{Com}(A)_{i,j} h_{i,j} = \text{Tr}(\text{Com}(A)^\top H)$$

On retrouve le résultat précédent. On peut aussi utiliser la linéarité en chaque colonne. Pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \operatorname{Com}(A)_{i,j}$$

d'où $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \partial_{i,j} f(A) = \operatorname{Com}(A)_{i,j}$
et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 4 (***)

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 1\}$. On pose

$$\forall (x, y) \in D \quad f(x, y) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y - \operatorname{Arctan} \left(\frac{x+y}{1-xy} \right)$$

1. Justifier que D est un ouvert puis décrire ses composantes connexes par arcs.
2. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle.
3. En déduire une expression simple de f .

Corrigé : 1. On pose $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 1 - xy$. L'application φ est polynomiale donc continue et on a $D = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$, image réciproque d'un ouvert par une application continue ce qui prouve

L'ensemble D est ouvert.

On pose $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\}$

$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, xy > 1\} \quad U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y < 0, xy > 1\}$$

et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \psi_1(x, y) = x \quad \text{et} \quad \psi_2(x, y) = y$

Les applications ψ_1 et ψ_2 sont continues sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiales. On a

$$U_1 = \varphi^{-1}([+\infty; 1[) \quad U_2 = \varphi^{-1}([1; +\infty[) \cap \psi_1^{-1}\{]0; +\infty[) \cap \psi_2^{-1}([0; +\infty[)$$

ce qui prouve que U_1 et U_2 sont des ouverts et on procède de même pour U_3 . L'ensemble U_1 est étoilé en $(0, 0)$: pour $(x, y) \in U_1$, le chemin $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto t(x, y)$ relie continument $(0, 0)$ à (x, y) et est à valeurs dans U_1 . Par conséquent, l'ensemble U_1 est connexe par arcs. L'ensemble U_2 est étoilé en $(2, 2)$. En effet, soit $(x, y) \in U_2$ et $t \in [0; 1]$. On a

$$x + y > x + \frac{1}{x} \geq 2$$

puis $(tx + (1-t)2)(ty + (1-t)2) = t^2xy + 2t(1-t)(x+y) + 4(1-t)^2$
 $> t^2 + 4t(1-t) + 4(1-t)^2$

et $t^2 + 4t(1-t) + 4(1-t)^2 = (t-2)^2 \geq 1$

Ainsi $(tx + (1-t)2)(ty + (1-t)2) > 1 \quad \text{et} \quad tx + (1-t)2 > 0 \quad ty + (1-t)2 > 0$

Par conséquent, l'ensemble U_2 est connexe par arcs. Par symétrie, on a également U_3 étoilé donc connexe par arcs. Enfin d'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout chemin continue qui relie un point de U_1 à un point de U_2 , un point de U_1 à un point de U_3 ou un point de U_3 à un point de U_2 prendra une valeur dans $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Supposons par exemple qu'il existe $\theta : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ continue, à valeurs dans D , qui relie un point de U_1 à un point de U_2 . Alors, on aurait $1 - x(0)y(0) > 0$ et $1 - x(1)y(1) < 0$ d'où l'existence d'une racine pour $t \mapsto 1 - x(t)y(t)$ ce qui est impossible. De même, si on considère que θ permet de relier un

point de U_2 à un point de U_3 , on aurait $x(0) > 0$ et $x(0) < 0$ d'où une racine pour x ce qui est impossible. Et on procède à l'identique entre U_1 et U_3 . On conclut

Les ensembles U_1 , U_2 et U_3 sont les composantes connexes par arcs de D et ce sont des ouverts.

Variante : Pour la connexité par arcs de U_2 , on peut montrer sa convexité. Notons

$$V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, xy \geq 1\}$$

Posant $g :]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[, x \mapsto \frac{1}{x}$, on remarque que V_2 est l'épigraphe Γ_g^+ de la fonction convexe g . Il en résulte que V_2 est convexe et par conséquent, l'ensemble $U_2 = \overset{\circ}{V}_2$ également (voir exercice 0feuille 0).

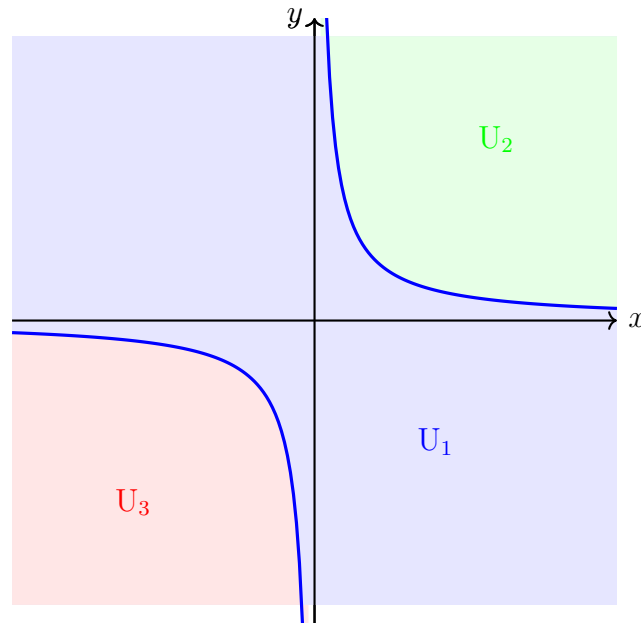


FIGURE 1 – Domaines U_1 , U_2 et U_3

2. L'application f est composée de fonctions de $\mathcal{C}^1$ sur D d'où $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in D \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2} \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1-xy)^2 + (x+y)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = 0 \end{aligned}$$

Comme $f(x, y) = f(y, x)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve également $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi

$$f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall x \in D \quad df(x) = 0$$

3. La fonction f est de différentielle nulle sur chaque ouvert connexe par arcs U_1 , U_2 et U_3 . Ainsi, la fonction f est constante sur chacun de ces ouverts. On a $f(0, 0) = 0$ d'où $f(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in U_1$. Puis

$$\forall x > 1 \quad f(x, x) = 2 \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} \frac{2x}{1-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pi$$

et

$$\forall (x, y) \in D \quad f(-x, -y) = -f(x, y)$$

On conclut

$$\forall (x, y) \in D \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in U_1 \\ \pi & \text{si } (x, y) \in U_2 \\ -\pi & \text{si } (x, y) \in U_3 \end{cases}$$

Exercice 5 (***)

Soit U ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est *convexe*, si

$$\forall (x, y) \in U^2 \quad \forall \lambda \in [0; 1] \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

On suppose f différentiable sur U . Montrer

$$f \text{ convexe} \iff \forall (x, y) \in U^2 \quad f(y) \geq f(x) + df(x) \cdot (y - x)$$

Corrigé : Supposons f convexe. Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in]0; 1]$. On a

$$f(x + \lambda(y - x)) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$$

Comme $\lambda(y - x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0_E$, il vient

$$f(x) + df(x) \cdot \lambda(y - x) + o(\lambda) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$$

Ainsi

$$df(x) \cdot (y - x) + o(1) \leq f(y) - f(x)$$

et faisant tendre $\lambda \rightarrow 0$, on a l'inégalité attendue. Réciproquement, on considère $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in [0; 1]$. On a

$$\begin{cases} f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) + df(\lambda x + (1 - \lambda)y) \cdot \lambda(y - x) \\ f(x) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) + df(\lambda x + (1 - \lambda)y) \cdot (1 - \lambda)(x - y) \end{cases}$$

Avec $(1 - \lambda)L_1 + \lambda L_2$, on obtient l'inégalité de convexité attendue. Ainsi

$$f \text{ convexe} \iff \forall (x, y) \in U^2 \quad f(y) \geq f(x) + df(x) \cdot (y - x)$$

Exercice 6 (***)

Étudier la continuité, l'existence des dérivées partielles premières et le caractère $\mathcal{C}^1$ des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} 1. \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\cos(x^2) - \cos(y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ 2. \quad f(x, y) &= \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Corrigé : 1. Par trigonométrie, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \cos(x^2) - \cos(y^2) = -2 \sin\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \sin\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)$$

On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car développable en série entière avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}$$

Or, on a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = -\varphi\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \sin\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)$

Par composition

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

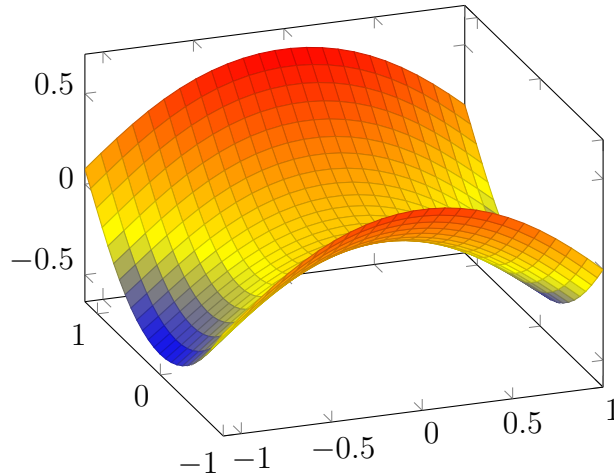


FIGURE 2 – Graphe de $z = f(x, y)$

2. On a $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R})$ par composition puis

$$\forall (x, y) \neq (0, 0) \quad |f(x, y) - f(0, 0)| \leq x^2 + y^2 \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

ce qui prouve la continuité de f en $(0, 0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$. Comme $f(x, y) = f(y, x)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il suffit d'étudier la dérivée partielle de f en la première variable. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) = xO(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Par dérivation, on trouve pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\forall x > 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 2x \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) - \frac{x}{|x|} \cos\left(\frac{1}{|x|}\right) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + o(1)$

qui n'admet pas de limite pour $x \rightarrow 0^+$ ce qui contredit la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0, 0)$. On conclut

$$\boxed{f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

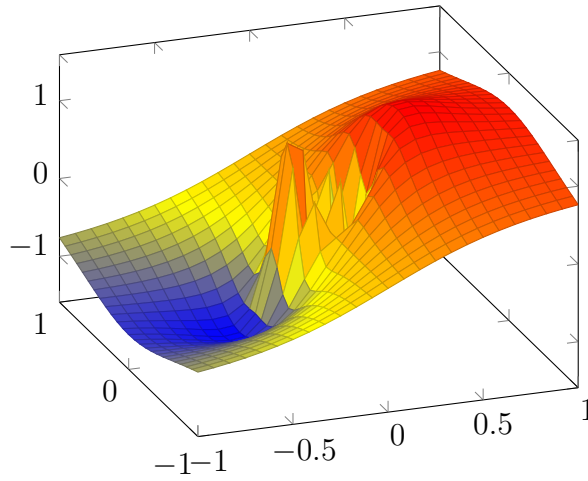


FIGURE 3 – Graphe de $z = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

Exercice 7 (***)

Soit E euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$.

1. Montrer que $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, u(x) \rangle$ est différentiable et préciser sa différentielle.

2. On pose

$$\Phi : \begin{cases} E \setminus \{0_E\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\langle x, u(x) \rangle}{\langle x, x \rangle} \end{cases}$$

Montrer que Φ est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ et l'équivalence pour $a \in E \setminus \{0_E\}$

$$d\Phi(a) = 0 \iff a \text{ vecteur propre de } u$$

Corrigé : 1. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de vecteurs propres de u . Pour $x \in E$, notant $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec les x_i coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, on a

$$u(x) = u\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j e_j$$

puis

$$f(x) = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j e_j \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \lambda_j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

Ainsi, l'application f est polynomiale en les x_i donc de classe $\mathcal{C}^1$ et par conséquent différentiable. On a

$$\forall x \in E \quad \nabla f(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) e_i = \sum_{i=1}^n 2\lambda_i x_i e_i = 2u(x)$$

Ainsi

L'application f est différentiable avec $df(x) : h \rightarrow \langle \nabla f(x), h \rangle = 2 \langle u(x), h \rangle$ pour $x \in E$.

Variante : Soient x et h dans E . On a

$$f(x+h) = \langle x+h, u(x+h) \rangle = \langle x, u(x) \rangle + \langle h, u(x) \rangle + \underbrace{\langle x, u(h) \rangle}_{=\langle u(x), h \rangle} + \langle h, u(h) \rangle$$

Comme l'application u est linéaire sur un espace de dimension finie, elle est C -lipschitzienne avec $C \geq 0$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle h, u(h) \rangle| \leq \|h\| \|u(h)\| \leq C \|h\|^2 = o(h)$$

Ainsi

$$f(x+h) = f(x) + 2 \langle u(x), h \rangle + o(h)$$

On retrouve alors le résultat précédent.

2. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. On a

$$\Phi(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Ainsi, l'application Φ est rationnelle en les x_i donc de classe $\mathcal{C}^1$ là où son dénominateur ne s'annule pas ce qui prouve que Φ est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$. Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a

$$\partial_i \Phi(x) = \frac{2\lambda_i x_i \|x\|^2 - 2x_i \langle x, u(x) \rangle}{\|x\|^4}$$

Puis

$$\begin{aligned} \forall x \in E \setminus \{0_E\} \quad \nabla \Phi(x) &= \sum_{i=1}^n \partial_i \Phi(x) e_i = \frac{2}{\|x\|^4} \left[\|x\|^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i - \langle x, u(x) \rangle \sum_{i=1}^n x_i e_i \right] \\ &= \frac{2}{\|x\|^4} [u(x) \|x\|^2 - \langle u(x), x \rangle x] \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \in E \setminus \{0_E\}$

$$d\Phi(x) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})} \iff \nabla \Phi(x) = 0_E \iff u(x) = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2} x$$

Ainsi, pour $x \in E$ non nul, si $d\Phi(x) = 0$, alors x est vecteur propre et si $u(x) = \lambda x$, on trouve sans difficulté $u(x) = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2} x$ d'où la nullité de $d\Phi(x)$. On conclut

L'application Φ est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ avec $d\Phi(x) = 0$ si et seulement si x vecteur propre de u .

Variante : Notons $g : x \mapsto \langle x, x \rangle$. Par bilinéarité du produit scalaire, l'application g est différentiable avec

$$\forall (x, h) \in E^2 \quad dg(x) \cdot h = 2 \langle x, h \rangle$$

L'application f/g est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ puisque g ne s'annule pas sur $E \setminus \{0_E\}$ et on trouve

$$\begin{aligned} \forall (x, h) \in E \setminus \{0_E\} \times E \quad d\Phi(x) \cdot h &= d \left(\frac{f}{g} \right) (x) \cdot h \\ &= \frac{1}{g^2(x)} [(df(x) \cdot h) g(x) + f(x) (dg(x) \cdot h)] \\ &= \frac{2}{\|x\|^4} [\langle u(x), h \rangle \|x\|^2 - \langle u(x), x \rangle \langle x, h \rangle] \\ d\Phi(x) \cdot h &= \frac{2}{\|x\|^4} \langle u(x) \|x\|^2 - \langle u(x), x \rangle x, h \rangle \end{aligned}$$

On en déduit

$$\forall (x, h) \in E \setminus \{0_E\} \times E \quad d\Phi(x) \cdot h = 0 \iff u(x) \|x\|^2 - \langle u(x), x \rangle x = 0$$

On conclut comme précédemment.

Exercice 8 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$ et on pose

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \quad F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Montrer que F se prolonge en fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé : On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad G(x, y) = \int_0^1 f'(tx + (1-t)y) dt$

Les fonctions G et F coïncident clairement sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$. Montrons que la fonction G admet des dérivées partielles continues. En remarquant $G(x, y) = G(y, x)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'existence et la continuité de la dérivée partielle de G en x équivaut à celle en y . Fixons y réel et notons $g_y : (x, t) \mapsto f'(tx + (1-t)y)$.

- Pour x réel, l'application $t \mapsto g_y(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur le segment $[0; 1]$.
- Pour $t \in [0; 1]$, on a $x \mapsto g_y(x, t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux, puis par dérivation

$$\frac{\partial g_y}{\partial x}(x, t) = t f''(tx + (1-t)y)$$

- Pour tout x réel, la fonction $t \mapsto \frac{\partial g_y}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0; 1]$.
- Domination : Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}$. L'application $(x, t) \mapsto \frac{\partial g_y}{\partial x}(x, t)$ est continue donc bornée sur le compact $[a; b] \times [0; 1]$ et la domination s'ensuit.

D'après le théorème de régularité de classe $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale, on a $x \mapsto G(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}$ d'où $x \mapsto G(x, y) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 t f''(tx + (1-t)y) dt$$

Montrons enfin la continuité de $\frac{\partial G}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$.

- Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $t \mapsto t f''(tx + (1-t)y)$ continue par morceaux sur $[0; 1]$.
- Pour $t \in [0; 1]$, on a $(x, y) \mapsto t f''(tx + (1-t)y)$ continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de telles fonctions.
- Domination : Soit K compact de $\mathbb{R}^2$. L'application $(x, y, t) \mapsto t f''(tx + (1-t)y)$ est continue donc bornée sur le compact $K \times [0; 1]$ (produit de compacts). La domination s'ensuit. On en déduit la continuité sur tout compact de $\mathbb{R}^2$ donc la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de $\frac{\partial G}{\partial x}$ et de même en y et on conclut

La fonction G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ prolonge la fonction F .

Remarque : L'écriture sous forme d'intégrale à paramètre permet d'établir, avec des arguments identiques, le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de F si f l'est aussi.

Exercice 9 (***)

Soit E euclidien et $f \in \mathcal{C}^1(E, E)$ telle que

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que pour tout $a \in E$, la différentielle $df(a)$ est injective puis bijective.
3. Soit $b \in E$. On pose $g(x) = \|f(x) - b\|^2$ pour tout $x \in E$.
 - (a) Justifier que g atteint un minimum m sur E .
 - (b) Montrer que $g \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ et déterminer $dg(a) \cdot h$ pour $(a, h) \in E^2$.
 - (c) Conclure que f est bijective. Que peut-on dire sur f^{-1} ?

Corrigé : 1. Immédiat.

2. Soit $(a, h) \in E^2$ et $t > 0$. Comme $th \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0_E$, on a

$$\|f(a + th) - f(a)\| = \|df(a) \cdot (th) + o(t)\| = t\|df(a) \cdot h + o(1)\| \geq t\|h\|$$

d'où
$$\|df(a) \cdot h + o(1)\| \geq \|h\|$$

et faisant tendre $t \rightarrow 0^+$, il vient

$$\|df(a) \cdot h\| \geq \|h\|$$

L'injectivité de $df(a)$ s'en déduit et comme c'est un endomorphisme en dimension finie, on conclut

Pour tout $a \in E$, la différentielle $df(a)$ est injective et donc bijective.

3.(a) L'ensemble $\text{Im } g$ est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ donc admet une borne inférieure m finie. Pour $x \in E$, on a

$$\sqrt{g(x)} = \|f(x) - b\| \geq \|f(x) - f(0)\| - \|f(0) - b\| \geq \|x\| - \|f(0) - b\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc, il existe $R > 0$ tel que $g(x) \geq g(0)$ pour $\|x\| > R$. La boule fermée $B_f(0, R)$ est un fermé borné de l'espace E de dimension finie et il s'agit donc d'un compact. Ainsi, l'application g , continue comme composée de telles fonctions, atteint son minimum sur $B_f(0, R)$. En particulier, on a $g(0) \geq \min_{B_f(0, R)} g$. Par conséquent

$$\forall x \in E \setminus B_f(0, R) \quad g(x) \geq \min_{B_f(0, R)} g \quad \text{et} \quad \forall x \in B_f(0, R) \quad g(x) \geq \min_{B_f(0, R)} g$$

On conclut

La fonction g atteint un minimum sur E .

Variante : Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on dispose de $(\alpha_n)_n$ à valeurs dans E telle que $g(\alpha_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m$. Puis, on a pour n entier

$$\|\alpha_n\| \leq \|f(\alpha_n) - f(0)\| \leq \|f(\alpha_n) - b\| + \|b - f(0)\| = O(1)$$

La suite $(\alpha_n)_n$ est bornée dans un espace de dimension finie donc à valeurs dans un compact. Par conséquent, on dispose de φ extractrice telle $\alpha_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \in E$. Par continuité de g , on en

déduit
$$g(\alpha_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(\alpha)$$

et la suite $(g(\alpha_n))_n$ étant convergente de limite m , toute sous-suite converge vers la même limite d'où le résultat.

3.(b) Par composition, l'application $g = \langle f - b, f - b \rangle$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$dg = \langle df, f - b \rangle + \langle f, df - b \rangle = 2 \langle f - b, df \rangle$$

Ainsi

$$\forall (a, h) \quad dg(a) \cdot h = 2 \langle f(a) - b, df(a) \cdot h \rangle$$

3.(c) Soit $x_0 \in E$ tel que $m = g(x_0)$. Comme E est un ouvert de lui-même, le point x_0 est point critique et on a donc $dg(x_0) = 0$ d'où

$$\forall h \in E \quad \langle f(x_0) - b, df(x_0) \cdot h \rangle = 0$$

En particulier, pour $h = df(x_0)^{-1} \cdot (f(x_0) - b)$, on obtient $\|f(x_0) - b\|^2 = 0$ d'où $b = f(x_0)$ ce qui prouve la surjectivité de f et on conclut

L'application f est bijective et l'application f^{-1} est 1-lipschitzienne.

Exercice 10 (****)

Soit E euclidien avec $\dim E \geq 2$ et $f \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ telle que $\frac{|f(x)|}{\|x\|} \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$. Montrer que ∇f est surjective.

Corrigé : Soit $a \in E$. On pose $g: \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - \langle x, a \rangle \end{cases}$

avec $a \in E$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E et avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle x, a \rangle| \leq \|x\| \|a\|$ pour $x \in E$, il vient

$$\forall x \in E \quad \frac{|g(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(x)| - \langle x, a \rangle}{\|x\|} = \frac{|f(x)|}{\|x\|} + O(1) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$$

Il existe $R > 0$ tel que

$$\forall x \in E \quad \|x\| > R \implies \frac{|g(x)|}{\|x\|} \geq 1 \implies |f(x)| > R$$

Notant

$$\Gamma_R = \{x \in E \mid \|x\| > R\}$$

On a donc

$$g(\Gamma_R) \subset]-\infty; -R[\cup]-R; +\infty[$$

Montrons que Γ_R est connexe par arcs. Soit $(x_1, x_2) \in \Gamma_R^2$ avec (x_1, x_2) libre. On pose

$$\forall t \in [0; 1] \quad \varphi(t) = \frac{\|x_1\|(1-t) + \|x_2\|t}{\|(1-t)x_1 + tx_2\|} [(1-t)x_1 + tx_2]$$

L'application φ est bien définie car le dénominateur ne s'annule pas par liberté de (x_1, x_2) et elle est continue sur $[0; 1]$ comme composée de telles fonctions. On a $\varphi(0) = x_1$, $\varphi(1) = x_2$ et

$$\forall t \in [0; 1] \quad \|\varphi(t)\| = \underbrace{\|x_1\|}_{>R} (1-t) + \underbrace{\|x_2\|}_{>R} t > R$$

ce qui prouve que φ est à valeurs dans Γ_R . Si (x_1, x_2) est liée, il suffit de choisir $y \in \Gamma_R$ tel que (x_1, y) soit libre (choix possible car $\dim E \geq 2$) puis de relier x_1 à y et y à x_2 par le procédé précédent. L'ensemble Γ_R est donc connexe par arcs. L'image d'un connexe par arcs par une application continue étant également connexe par arcs, on a

$$g(\Gamma_R) \subset]-\infty; -R[\quad \text{ou} \quad g(\Gamma_R) \subset]R; +\infty[$$

Quitte à considérer $-g$, on peut supposer $g(\Gamma_R) \subset]R; +\infty[$. On en déduit $g(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$.

D'après un résultat classique (exercice 8 feuille 32), il s'ensuit que g admet un minimum global. L'ensemble E étant ouvert, il s'agit d'un point critique de g . Or, on a

$$\forall x \in E \quad \nabla g(x) = \nabla f(x) - a$$

Ainsi

$$\forall a \in E \quad \exists x \in E \quad \nabla f(x) - a = 0$$

On conclut

La fonction ∇f est surjective.