

Feuille d'exercices n°76

Exercice 1 (*)

Étudier le caractère $\mathcal{C}^\infty$ des fonctions suivantes :

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = x^2 + xy + y^2$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x + y) \cos(xy)$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \max(x, y)$

Corrigé : 1. La fonction f est polynomiale donc

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

2. On a $(x, y) \mapsto xy$ polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ puis $(x, y) \mapsto \cos(xy)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ par composition et $(x, y) \mapsto x + y$ polynomiale et donc, par produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

3. La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ puis $\sqrt{\cdot}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$ d'où $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R})$ par composition. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$$

qui n'admet pas de limite en 0. La fonction f n'est donc pas différentiable en $(0, 0)$ et on conclut

$$\boxed{f \notin \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

4. On a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$

d'où la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs, notant Δ l'axe d'équation $y = x$, on a clairement $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \Delta, \mathbb{R})$. Étudions la dérivabilité de f en (a, a) avec a réel selon $(1, 0)$. On a

$$\forall t > 0 \quad \frac{f(a + t, a) - f(a, a)}{t} = 1 \quad \text{et} \quad \forall t < 0 \quad \frac{f(a + t, a) - f(a, a)}{t} = 0$$

ce qui prouve que f n'admet pas dérivée en (a, a) selon $(1, 0)$. Par conséquent, la fonction f n'est différentiable en aucun point de Δ et on conclut

$$\boxed{f \notin \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

Exercice 2 (**)

On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$

Étudier le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de f .

Corrigé : On pose $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car développable en série entière avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n!}$$

Or, on a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = y\varphi(xy)$

Par composition

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

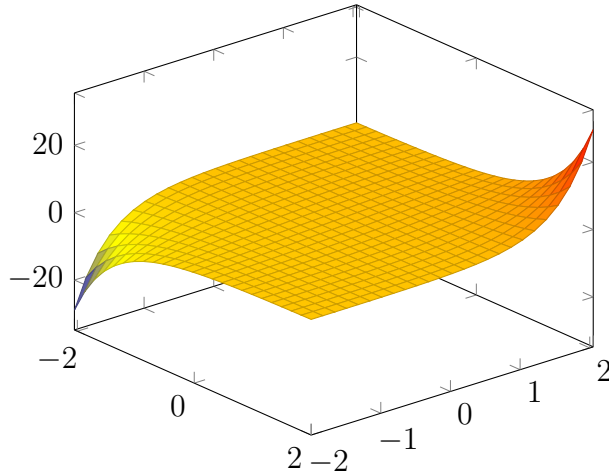


FIGURE 1 – Tracé de $z = f(x, y)$

Exercice 3 (**)

On pose $\forall (x, y) \in]0; +\infty[^2 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(x) - \ln(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(]0; +\infty[^2, \mathbb{R})$.

Corrigé : On pose $\forall t > 0 \quad \varphi(t) = \begin{cases} \frac{\ln(t)}{t-1} & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1; +\infty[$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule. Par ailleurs, on a le développement en série entière

$$\forall h \in]-1; 1[\quad \varphi(1+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{h^n}{n+1}$$

ce qui prouve le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de $h \mapsto \varphi(1+h)$ sur $] -1; 1[$ et donc le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de φ sur $]0; 2[$. Il en résulte que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(]0; +\infty[, \mathbb{R})$ puis on a

$$\forall (x, y) \in]0; +\infty[^2 \quad f(x, y) = \frac{1}{x} \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Les fonctions rationnelles $(x, y) \mapsto \frac{1}{x}$ et $(x, y) \mapsto \frac{y}{x}$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[^2$, par composition et produit on conclut

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^\infty(]0; +\infty[^2, \mathbb{R})}$$

Exercice 4 (**)

On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

L'application f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

Corrigé : On a $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R})$ en tant que fonction rationnelle bien définie sur ce domaine. Par inégalité triangulaire, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad |f(x, y) - f(0, 0)| \leq 2|xy| \quad \text{et} \quad |xy| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

d'où la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$. On a $f(x, y) = -f(y, x)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. L'existence et la continuité de la dérivée partielle de f en x et en y sont équivalentes. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut 0. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ 0 \end{cases} \quad \text{sinon}$$

Là encore, par inégalité triangulaire, il vient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| \leq 3|y| \quad \text{et} \quad |y| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

ce qui prouve la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

D'après l'égalité $f(x, y) = -f(y, x)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il vient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$$

Puis $\forall y \in \mathbb{R}^* \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = -\frac{y^5}{y^5} = -1 \xrightarrow{y \rightarrow 0} -1$

et $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{x - 0} = \frac{x^5}{x^5} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$

Si f était de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, le théorème de Schwarz garantirait l'égalité $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ qui n'a pas lieu. On conclut

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

Remarques : (a) On pourrait aussi calculer complètement une dérivée partielle d'ordre 2 et vérifier qu'elle n'est pas continue.

(b) Il s'agit du contre-exemple historique proposé par le mathématicien italien *Giuseppe Peano* au théorème de Schwarz.

Exercice 5 (*)

On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x - y)^2 + x^3 + y^3$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé : La fonction f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. On cherche les points critiques :

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} 2(x - y) + 3x^2 = 0 \\ 2(y - x) + 3y^2 = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)$$

Il n'est pas utile d'étudier les conditions du deuxième ordre puisqu'on observe directement

$$\forall x > 0 \quad f(x, x) = 2x^3 > 0 \quad \text{et} \quad \forall x < 0 \quad f(x, x) = 2x^3 < 0$$

Ainsi

La fonction f n'admet pas d'extremums sur $\mathbb{R}^2$.

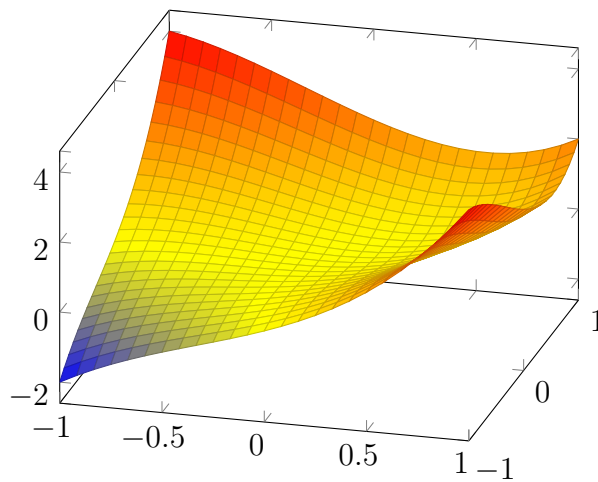


FIGURE 2 – Graphe de $z = f(x, y)$

Exercice 6 (*)

On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - (x - y)^4$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé : La fonction f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. On cherche les points critiques :

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} 2x - 4(x - y)^3 = 0 \\ 2y - 4(y - x)^3 = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \left\{ (0, 0), \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right), \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) \right\}$$

Par dérivation, on trouve pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 - 12(x - y)^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 - 12(y - x)^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 12(x - y)^2$$

• En $(0, 0)$, la matrice hessienne est $2I_2$ de déterminant égal à $4 > 0$ et de trace égale à $4 > 0$. Le point $(0, 0)$ est donc un minimum local. Cet extremum n'est pas global puisque

$$f(x, 0) = x^2 - x^4 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$$

• En $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, la matrice hessienne est $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ de déterminant égal à -8 ce qui prouve que le point considéré n'est pas un extremum local et de même pour le point restant pour raison de symétrie. On conclut

La fonction f admet un unique extremum qui est un minimum local non global atteint en $(0, 0)$.

Remarque : Pour le point $(0, 0)$, on peut observer directement

$$f(x, y) - f(0, 0) \underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{=} (x^2 + y^2) (1 + o(1))$$

ce qui prouve le caractère minimum local du point.

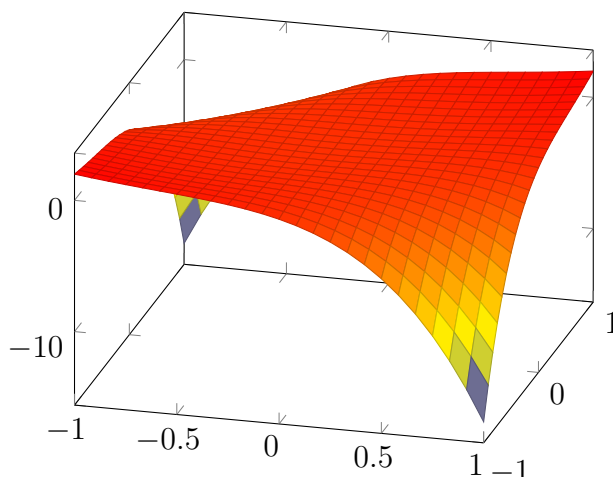


FIGURE 3 – Graphe de $z = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

Exercice 7 (**)

Soit n entier avec $n \geq 2$ et $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} x_i x_j$$

1. Montrer que f admet un minimum m et un maximum M sur B .
2. Montrer que m et M ne sont pas atteints sur $\overset{\circ}{B}$.
3. Montrer que $m = -1$ et $M = n - 1$.

Corrigé : 1. L'ensemble B est un fermé borné d'un espace de dimension finie et c'est donc un compact. La fonction f est polynomiale donc continue sur le compact B et par conséquent

La fonction f atteint ses bornes sur B .

2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ car polynomiale. Si elle atteint ses extremums sur l'ouvert $\overset{\circ}{B}$, alors il s'agit de points critiques. On trouve

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \partial_k f(x) = 2 \sum_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{k\}} x_i$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi} \quad \nabla f(x) = 0 &\iff \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sum_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{k\}} x_i = 0 \\ &\iff \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sum_{i=1}^n x_i = x_k \iff x = 0 \end{aligned}$$

Or, on a $\forall t > 0 \quad f(t, t, 0, \dots, 0) = 2t^2 > 0$ et $f(t, -t, 0, \dots, 0) = -2t^2 < 0$
ce qui prouve que l'unique point critique 0 n'est pas un extremum. On conclut

Les extremums de f ne sont pas atteints sur $\overset{\circ}{B}$.

3. D'après ce qui précède, la fonction f atteint ses bornes sur B en des points de la frontière ∂B . On a $\partial B = S(0, 1)$. En effet, la boule ouverte $B(0, 1)$ est un ouvert inclus dans B . Considérons U ouvert de E tel que $B(0, 1) \subset U \subset B$. Soit $x \in U$. On dispose de $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$ par ouverture. En particulier, on a

$$x + \frac{\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\|x\|}\right) x \in B(x, \varepsilon) \subset U \subset B$$

Passant à la norme, il vient $\|x\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq 1$

d'où $\|x\| < 1$ ce qui prouve $x \in B(0, 1)$ d'où $\overset{\circ}{B} = B(0, 1)$ comme plus grand ouvert inclus dans B et par suite $\partial B = B_f(0, 1) \setminus B(0, 1) = S(0, 1)$. On observe

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j - \sum_{i=1}^n x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

avec égalité si et seulement si x est colinéaire à $u = (1, \dots, 1)$. On en déduit

$$\forall x \in \partial B \quad f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - 1 \leq n - 1 = f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)$$

Puis $\forall x \in \partial B \quad f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - 1 \geq -1 = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right)$

On conclut

$$m = -1 \quad \text{et} \quad M = n - 1$$

Remarque : Pour la majoration, on peut aussi invoquer l'inégalité de Jensen avec la convexité de $t \mapsto t^2$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = n^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Exercice 8 (*)

On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ puis sur $B_f(0, 1)$.

Corrigé : La fonction f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Les éventuels extremums de f sont points critiques. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 6x + 2y = 0 \\ 6y + 2x = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)$$

Il n'est pas utile d'étudier les conditions du deuxième ordre puisqu'on observe directement

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = 2(x^2 + y^2) + (x + y)^2 \geq 0 = f(0, 0)$$

Ainsi

Le point $(0, 0)$ est minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$ et sur $B_f(0, 1)$.

L'ensemble $K = B_f(0, 1)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, espace de dimension finie. C'est donc un compact et la fonction continue f y admet un maximum. Celui-ci est atteint soit sur $\overset{\circ}{K}$, soit sur ∂K . S'il est atteint dans l'ouvert $\overset{\circ}{K}$, alors il est point critique mais l'unique point critique $(0, 0)$ dans cet ouvert est un minimum et la fonction n'est pas constante. Par suite, la fonction f atteint son maximum sur la frontière ∂K décrite par l'équation $x^2 + y^2 = 1$. Avec le paramétrage $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, notant $g(t) = f(\cos t, \sin t)$ pour t réel, on trouve

$$\max_{(x, y) \in K} f(x, y) = \max_{t \in [0; 2\pi]} f(\cos t, \sin t) = \max_{t \in [0; 2\pi]} 3 + \sin(2t) = 4 = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

La fonction f admet un maximum sur $B_f(0, 1)$ en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

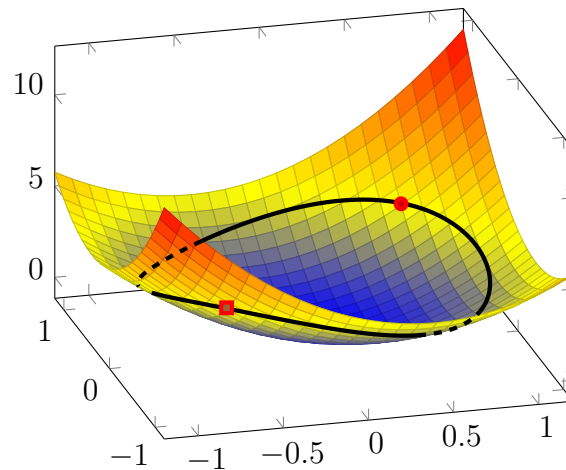


FIGURE 4 – Graphe de $z = f(x, y)$ de l'image du cercle unité

Variante : On note $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = X^T A X$$

Par réduction, on trouve $P^T A P = D = \text{diag}(4, 2)$ avec $P = R(\pi/4)$. Posant $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ avec $X = P U$, on trouve

$$X^T A X = U^T P^T A P U = U^T D U = 4u^2 + 2v^2$$

On en déduit instantanément

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$$

Puis, comme la matrice P est une matrice d'isométrie, on a $\|X\| = \|U\|$ et il vient

$$\max_{\|X\| \leq 1} X^T A X = \max_{\|U\| \leq 1} 4u^2 + 2v^2 = 4 \times 1 + 2 \times 0$$

ce qui prouve que le maximum est atteint en $(u, v) = (1, 0)$ et $(-1, 0)$. Par changement de base, on retrouve le résultat précédent.

Exercice 9 (**)

On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = x^3 + y^3$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ puis sur $B_f(0, 1)$.

Corrigé : La fonction f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Les éventuels extremums de f sont points critiques. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 3x^2 = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)$$

Il n'est pas utile d'étudier les conditions du deuxième ordre puisqu'on peut observer directement

$$\forall x > 0 \quad f(x, 0) = x^3 > 0 = f(0, 0) \quad \text{et} \quad f(-x, 0) = -x^3 < 0 = f(0, 0)$$

Le point $(0, 0)$ n'est donc ni minimum, ni maximum local pour f et par conséquent

La fonction n'admet aucun extremum sur $\mathbb{R}^2$.

L'ensemble $K = B_f(0, 1)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, espace de dimension finie. C'est donc un compact et la fonction continue f y atteint ses bornes. Celles-ci sont atteintes soit sur $\overset{\circ}{K}$, soit sur ∂K . Si elles sont atteintes dans l'ouvert $\overset{\circ}{K}$, alors elles sont points critiques mais l'unique point critique $(0, 0)$ dans cet ouvert n'est pas un extremum. Les bornes sont donc atteintes sur la frontière ∂K paramétrée par $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$. On pose

$$\forall t \in [0; 2\pi] \quad g(t) = f(\cos(t), \sin(t)) = \cos(t)^3 + \sin(t)^3$$

On a $\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) \leq \cos(t)^2 + \sin(t)^2 \leq 1 = f(1, 0) = f(0, 1)$

et $\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) \geq -(\cos(t)^2 + \sin(t)^2) = -1 = f(-1, 0) = f(0, -1)$

La fonction f atteint son maximum sur $B_f(0, 1)$ en $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et son minimum en $(-1, 0)$ et $(0, -1)$.

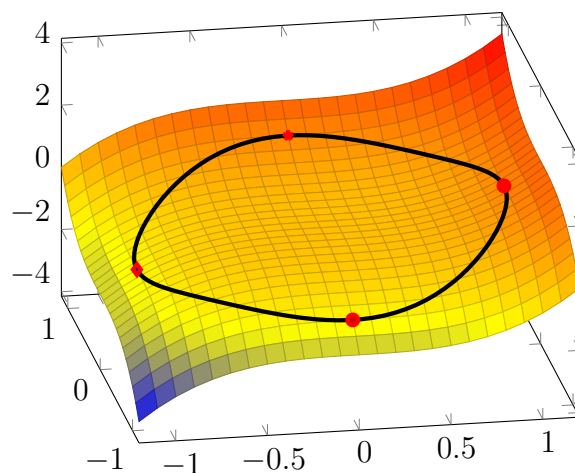


FIGURE 5 – Graphe de $z = f(x, y)$ de l'image du cercle unité

Exercice 10 (*)

On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = 2x + y \quad \text{et} \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 5$

Étudier les extremums de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

Corrigé : Les fonctions f et g sont polynomiales donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. On a l'équivalence pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$g(x, y) = 0 \iff (x, y) \in S(0, \sqrt{5})$$

La fonction continue f admet un minimum et un maximum sur la sphère $S(0, \sqrt{5})$ qui est un compact de $\mathbb{R}^2$ en tant que fermé borné d'un espace de dimension finie. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \nabla g(x, y) = 2(x, y)$$

Ainsi $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \nabla g(x, y) = (0, 0) \iff x = y = 0$

Or, on a $g(0, 0) = -5 \neq 0$ donc les extremums de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$ sont des points où $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$. Par conséquent, d'après le théorème d'optimisation sous contrainte, ces points sont solutions de

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 0$$

c'est-à-dire $\exists \lambda \in \mathbb{R} : (2, 1) = 2\lambda(x, y) \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 5$

On en déduit notamment que λ n'est pas nul puis

$$x = \frac{1}{\lambda} \quad y = \frac{1}{2\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 5$$

On trouve $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ puis $(x, y) \in \{(2, 1), (-2, -1)\}$

On remarque $f(2, 1) = 5 > -5 = f(-2, -1)$

et on conclut

Sous la contrainte $g(x, y) = 0$, la fonction f admet un maximum en $(2, 1)$ et un minimum en $(-2, -1)$.

Exercice 11 (**)

On pose $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = \prod_{i=1}^n x_i \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$

Étudier les extremums de f sous la contrainte $g(x) = 0$.

Corrigé : Les fonctions f et g sont polynomiales donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$. On a $g^{-1}(\{0\}) = S(0, 1)$, fermé borné de l'espace $\mathbb{R}^n$ de dimension finie. Il s'ensuit que $g^{-1}(\{0\})$ est compact et la fonction continue f y admet un minimum et un maximum. Par dérivation on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \nabla g(x) = 2x$$

d'où pour $x \in \mathbb{R}^n \quad \nabla g(x) = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$

Or, on a $g(0_{\mathbb{R}^n}) = -1 \neq 0$ donc les extremums de f sous la contrainte $g(x) = 0$ sont des points où $\nabla g(x) \neq 0$. Par conséquent, d'après le théorème d'optimisation sous contrainte, ces points sont solutions de :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 0$$

et en particulier
$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \left(\prod_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{k\}} x_i \right)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket} = 2\lambda x$$

Si $\lambda = 0$, alors l'une des coordonnées x_i est nulle et par suite $f(x) = 0$. Supposons ensuite $\lambda \neq 0$. On en déduit

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x_i^2 = \frac{1}{2\lambda} f(x)$$

Ceci prouve que les x_i^2 sont égaux entre eux et comme $g(x) = 0$, il s'ensuit

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x_i = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et on trouve
$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \pm \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

le signe étant déterminé par la parité du nombre de coordonnées négatives. On constate alors que le cas $\lambda = 0$ ne fournit pas la configuration d'un extremum et on conclut

Sous la contrainte $g(x) = 0$, la fonction f admet ses extremums en des points de coordonnées $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ qui sont des maximums s'il y a un nombre pair de coordonnées négatives et des minimums sinon.

Remarque : Pour $x \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées toutes non nulles, on obtient par inégalité arithmético-géométrique

$$\left(\prod_{i=1}^n |x_i| \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|$$

et par inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Si $g(x) = 0$, on a donc
$$\left(\prod_{i=1}^n |x_i| \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

d'où
$$\left| \prod_{i=1}^n x_i \right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n$$

Le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz est réalisée si et seulement si $(|x_1|, \dots, |x_n|)$ est colinéaire à $(1, \dots, 1)$ et on retrouve exactement les points obtenus précédemment.