

Feuille d'exercices n°77

Exercice 1 (***)

Soit E euclidien et $U = E \setminus \{0_E\}$. On pose

$$\forall x \in U \quad f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U et que pour $x \in U$, la différentielle $df(x)$ est une *similitude*, *i.e.* de la forme αg avec $\alpha \geq 0$ et $g \in \mathcal{O}(E)$. On précisera la nature de la similitude en question.

Corrigé : L'ensemble $U = \|\cdot\|^{-1}(\]0; +\infty[)$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par la norme, application continue car 1-lipschitzienne. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E . Pour $x \in E$, notant $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec les x_i réels, on a

$$\forall x \in U \quad f(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right)$$

Les fonctions coordonnées sont données par

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \forall x \in U \quad f_i(x) = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Ces fonctions sont rationnelles, bien définies sur U donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U . Ainsi

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^\infty(U, E)}$$

Par dérivation, on trouve

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \forall x \in U \quad \partial_i f_j(x) = \frac{\delta_{i,j} \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2x_i x_j}{\left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^2}$$

$$\text{d'où} \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \forall x \in U \quad \partial_i f(x) = \sum_{j=1}^n \partial_i f_j(x) e_j = \frac{1}{\|x\|^2} \left[e_i - 2 \frac{x_i}{\|x\|} \frac{x}{\|x\|} \right]$$

Et par conséquent, pour $(x, h) \in U \times E$

$$df(x) \cdot h = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) h_i = \frac{1}{\|x\|^2} \left[\sum_{i=1}^n h_i e_i - 2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i h_i}{\|x\|} \frac{x}{\|x\|} \right] = \frac{1}{\|x\|^2} \left[h - 2 \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|} \frac{x}{\|x\|} \right]$$

Le vecteur $x/\|x\|$ forme une base orthonormée de $\text{Vect}(x)$ et on reconnaît entre crochet l'expression de la réflexion orthogonale par rapport à $\text{Vect}(x)^\perp$. On conclut

$$\boxed{\forall x \in U \quad df(x) = \frac{1}{\|x\|^2} s_{\text{Vect}(x)^\perp}}$$

Variante : Pour $(x, h) \in U \times E$, on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{x+h}{\|x\|^2 + 2\langle x, h \rangle + \|h\|^2} = \frac{x+h}{\|x\|^2} \left(1 + 2\frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|^2} + o(h) \right)^{-1} \\ &= \frac{x+h}{\|x\|^2} \left(1 - 2\frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|^2} + o(h) \right) = \frac{x}{\|x\|^2} + \frac{1}{\|x\|^2} \left[h - 2\frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|} \frac{x}{\|x\|} \right] + o(h) \end{aligned}$$

On retrouve le résultat précédent.

Exercice 2 (***)

On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \sin(x) \sin(y) \sin(x+y)$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ puis sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]^2$.

Corrigé : On remarque

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+\pi, y) = f(x, y) \quad \text{et} \quad f(x, y+\pi) = f(x, y)$$

ce qui permet donc de réduire le domaine d'étude à $[0; \pi]^2$. On remarque aussi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(\pi-x, \pi-y) = -f(x, y)$$

ce qui permet de réduire le domaine d'étude à $A = \{(x, y) \in [0; \pi]^2 \mid x+y \leq \pi\}$, le comportement sur $[0; \pi]^2 \setminus A$ s'en déduisant. L'ensemble A est un compact (fermé borné en dimension finie). La fonction f est continue comme composée de telles fonctions et admet donc un maximum et un minimum sur A . On a clairement

$$\forall (x, y) \in A \quad f(x, y) \geq 0$$

puis $\forall (x, y) \in \partial A \quad f(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in \overset{\circ}{A} \quad f(x, y) > 0$

Tous les points de ∂A sont donc des minimums de f sur A . La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de telles fonctions et elle atteint son maximum sur A sur l'ouvert $\overset{\circ}{A}$ en un point critique. On a pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = (0, 0) &\iff \begin{cases} \sin(y) [\cos(x) \sin(x+y) + \sin(x) \cos(x+y)] = 0 \\ \sin(x) [\cos(y) \sin(x+y) + \sin(y) \cos(x+y)] = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \sin(2x+y) = 0 \\ \sin(x+2y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y \equiv 0 \pmod{\pi} \\ x+2y \equiv 0 \pmod{\pi} \end{cases} \end{aligned}$$

On trouve $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ unique point critique de f dans $\overset{\circ}{A}$. D'après ce qui précède, il s'agit donc du maximum de f sur A et d'après la réduction du domaine d'étude, on en déduit

La fonction f admet un maximum global en les points $\left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + \ell\pi\right)_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2}$
 et un minimum global en les points $\left(\frac{2\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + \ell\pi\right)_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2}$.

L'ensemble $B = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]^2$ est un compact et la fonction continue f y admet un maximum et un minimum. Comme $B \subset A$ et que la fonction f admet un maximum global sur A en $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, il s'agit donc également du maximum de f sur B et on a $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in B$ avec

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad f(t, 0) = f(0, t) = 0$$

On conclut

La fonction f admet un maximum global sur B en $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ et un minimum global sur B en les points $(0, t)$ et $(t, 0)$ avec $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

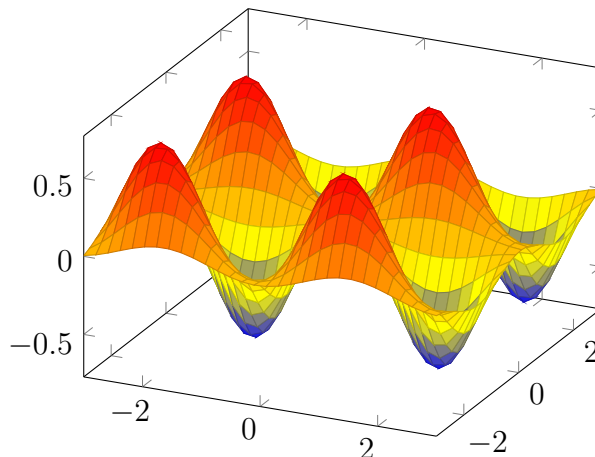


FIGURE 1 – Graphe de $z = f(x, y)$

Exercice 3 (***)

On pose $\forall (x, y) \in]0; +\infty[^2 \quad f(x, y) = \frac{1}{xy} + x + y$

Étudier les extremums de f sur $]0; +\infty[^2$.

Corrigé : On a $f \in \mathcal{C}^1(]0; +\infty[^2, \mathbb{R})$ en tant que fonction rationnelle bien définie. L'ensemble $]0; +\infty[^2$ est ouvert donc les éventuels extremums de f sont points critiques. On obtient pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 1 - \frac{1}{yx^2} = 0 \\ 1 - \frac{1}{xy^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x^4 \\ y = \frac{1}{x^2} \end{cases} \iff (x, y) = (1, 1)$$

Par dérivation, on trouve pour $(x, y) \in]0; +\infty[^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{x^3 y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2}{x y^3} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2}$$

En $(1, 1)$, la matrice hessienne $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est de déterminant égal à $3 > 0$ et de trace égale à $4 > 0$. Le point $(1, 1)$ est donc un minimum local. Pour l'étude du caractère global, c'est moins immédiat. On a

$$\forall (x, y) \in]0; +\infty[\quad f(x, y) \geq x + y \geq \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} +\infty$$

Par comparaison

$$f(x, y) \xrightarrow{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} +\infty$$

Ainsi, on dispose de $R \geq 0$ tel que $f(x, y) > f(1, 1)$ pour $\|(x, y)\| > R$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{1}{\varepsilon R} > f(1, 1)$. Pour $(x, y) \in]0; +\infty[^2 \cap B_f(0, R)$ avec $x < \varepsilon$ ou $y < \varepsilon$, on a

$$f(x, y) \geq \frac{1}{xy} \geq \frac{1}{\varepsilon R} > f(1, 1)$$

Notons $K_{R, \varepsilon} = \{(x, y) \in [\varepsilon; +\infty[^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$

D'après ce qui précède, on a montré

$$\forall (x, y) \in]0; +\infty[^2 \setminus K_{R, \varepsilon} \quad f(x, y) > f(1, 1) \geq \inf_{K_{R, \varepsilon}} f$$

la dernière inégalité résultant du fait que $(1, 1) \in K_{R, \varepsilon}$ puisqu'il n'est pas hors de cet ensemble. On en déduit

$$\inf_{]0; +\infty[^2} f = \inf_{K_{R, \varepsilon}} f$$

Or, l'ensemble $K_{R, \varepsilon}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, espace de dimension finie. C'est donc un compact et la fonction continue f y atteint sa borne inférieure ce qui prouve que la fonction f admet un minimum global. Comme la fonction admet un unique point critique sur $]0; +\infty[^2$, c'est nécessairement le point $(1, 1)$ et on conclut

La fonction f atteint un minimum global en $(1, 1)$.

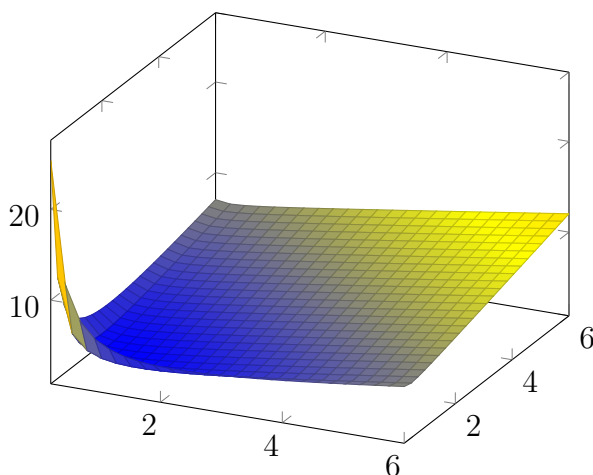


FIGURE 2 – Graphe de $z = f(x, y)$

Variante : Avec l'inégalité arithmético-géométrique, on observe

$$\forall (x, y) \in]0; +\infty[^2 \quad \frac{1}{3} \left(\frac{1}{xy} + x + y \right) \geq \left(\frac{xy}{xy} \right)^{\frac{1}{3}} = 1$$

d'où $\forall (x, y) \in]0; +\infty[^2 \quad f(x, y) \geq 3 = f(1, 1)$

ce qui prouve que le point $(1, 1)$ est un minimum global. Encore faut-il penser à cette approche totalement expéditive ...

Exercice 4 (***)

On pose

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

et

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puis étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter le domaine D et préciser sa nature topologique.
3. Étudier les extremums de f sur D .

Corrigé : 1. La fonction f est polynomiale d'où

$$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est ouvert donc les éventuels extremums de f sont points critiques. On a

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)$$

Puis, on trouve

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad f(x, y) = \frac{1}{2} [(x - y)^2 + x^2 + y^2] > 0 = f(0, 0)$$

Ainsi

La fonction f admet un unique extremum qui est un minimum global strict en $(0, 0)$.

2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(x, y) \in D \iff \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \leq x^2 + y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

On en déduit que le domaine D est contenu dans le disque unité fermé en excluant le disque ouvert centré en $(1/2, 0)$ de rayon $1/2$.

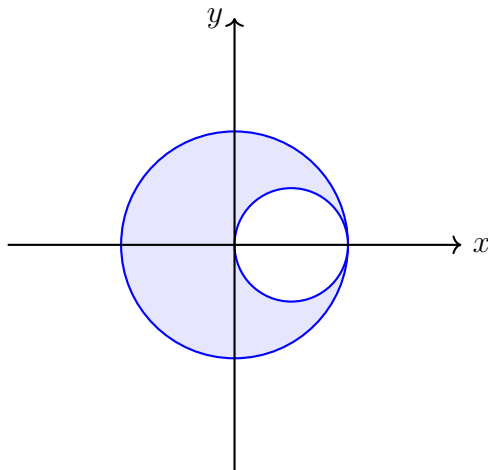


FIGURE 3 – Domaine D

On a $D = B_f(0, 1) \setminus B(1/2, 1/2)$ ce qui prouve la fermeture de D ainsi que son caractère borné dans $\mathbb{R}^2$ espace de dimension finie. On conclut

L'ensemble D est un compact.

3. On a $(0,0) \in D$ et la fonction f y admet donc un minimum global strict sur D . Puis, la fonction f est continue sur le compact D donc y admet un maximum, localisé dans l'intérieur $\mathring{D}$ ou sur la frontière ∂D .

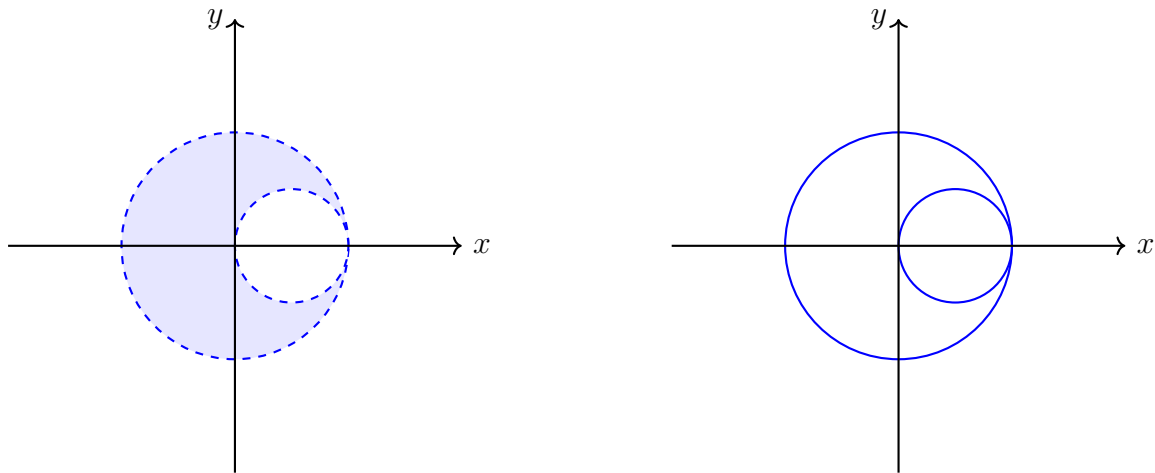


FIGURE 4 – Domaines $\mathring{D}$ et ∂D

On a
$$\mathring{D} : x < x^2 + y^2 < 1$$

Le point $(0,0)$ n'appartient pas à $\mathring{D}$ donc la fonction f n'admet pas de point critique dans $\mathring{D}$. Par conséquent, elle atteint son maximum sur D sur la frontière ∂D . On peut paramétrer les composantes de ∂D par $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ et $t \mapsto \left(\frac{1}{2}(1 + \cos(t)), \frac{\sin(t)}{2}\right)$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = f(\cos(t), \sin(t)) = 1 - \cos(t) \sin(t) = 1 - \frac{\sin(2t)}{2}$$

et
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad h(t) = f\left(\frac{1}{2}(1 + \cos(t)), \frac{\sin(t)}{2}\right) = \frac{1}{4}(1 + \cos(t))(2 - \sin(t))$$

On en déduit
$$\text{Im } g = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] \quad \text{et} \quad \text{Im } h \subset \left[0; \frac{3}{2}\right[$$

avec
$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

On conclut

Sur D , la fonction f admet un minimum en $(0,0)$ et un maximum en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Exercice 5 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On dit que f est homogène de degré p entier si

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2 \quad f(tx, ty) = t^p f(x, y)$$

Montrer que f est homogène de degré p si et seulement si

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = pf$$

Corrigé : On suppose f homogène. Fixons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = f(tx, ty) - t^p f(x, y)$$

Par dérivation composée, on a

$$\forall t > 0 \quad g'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) - pt^{p-1} f(x, y)$$

La fonction g étant nulle sur $]0; +\infty[$, on a en particulier $g(1) = 0$ d'où

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = pf$$

Supposons que f vérifie cette dernière relation. Fixons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On trouve

$$\forall t > 0 \quad tg'(t) = tx \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + ty \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) - pt^p f(x, y) = pf(tx, ty) - pt^p f(x, y) = pg(t)$$

Ainsi, la fonction g est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} tg' - pg = 0 \\ g(1) = 0 \end{cases}$$

dont la fonction nulle est l'unique solution d'après le théorème de Cauchy linéaire. On conclut

La fonction f est homogène de degré p si et seulement si $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = pf$.

Exercice 6 (****)

On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ puis sur $B_f(0, 1)$.

Corrigé : On a $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en tant que fonction polynomiale. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est ouvert donc les éventuels extremums de f sont points critiques. On obtient pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \iff \begin{cases} x(x^3 - 1) = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, 0), (1, 1)\}$$

Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -3$$

• En $(0, 0)$, la matrice hessienne $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ est de déterminant égal à $-9 < 0$ ce qui prouve que le point $(0, 0)$ n'est pas un extremum local.

• En $(1, 1)$, la matrice hessienne $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ est de déterminant égal à $27 > 0$ et de trace égale à $12 > 0$ ce qui prouve que le point $(1, 1)$ est minimum local de f . Avec

$$f(x, 0) = x^3 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$$

On conclut

Le point $(1, 1)$ est l'unique extremum de f , minimum local non global.

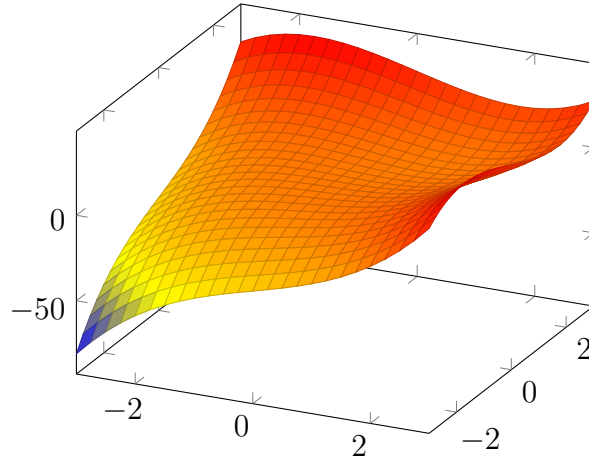


FIGURE 5 – Graphe de $z = f(x, y)$

La boule fermée $B_f(0, 1)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, espace de dimension finie. Il s'agit donc d'un compact. La fonction f continue atteint ses bornes sur $B_f(0, 1)$. Celles-ci sont atteintes soit sur la frontière, soit à l'intérieur. L'intérieur de $B_f(0, 1)$ est l'ouvert $B(0, 1)$ et sur cet ouvert, tout extremum de f est point critique. Or, le seul point critique de f dans $B(0, 1)$ est $(0, 0)$ et ce n'est pas un extremum. On en déduit que les bornes de f sur $B_f(0, 1)$ sont atteintes sur la frontière $\partial B_f(0, 1)$. On pose

$$\forall t \in [0; 2\pi] \quad \varphi(t) = f(\cos(t), \sin(t))$$

$$\text{On a} \quad \sup_{(x,y) \in B_f(0,1)} f(x, y) = \sup_{t \in [0; 2\pi]} \varphi(t) \quad \text{et} \quad \inf_{(x,y) \in B_f(0,1)} f(x, y) = \inf_{t \in [0; 2\pi]} \varphi(t)$$

Soit $t \in [0; 2\pi]$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \cos(t)^3 + \sin(t)^3 - 3 \sin(t) \cos(t) \\ &= (\cos(t) + \sin(t))(1 - \cos(t) \sin(t)) - 3 \sin(t) \cos(t) \\ \varphi(t) &= (\cos(t) + \sin(t)) \left(1 - \frac{1}{2} ((\cos(t) + \sin(t))^2 - 1) \right) - \frac{3}{2} ((\cos(t) + \sin(t))^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\text{Notant} \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad g(u) = u^3 + 3u^2 - 3u - 3$$

$$\text{On a} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = -\frac{1}{2}g(\cos(t) + \sin(t)) = -\frac{1}{2}g(\sqrt{2} \cos(t - \pi/4))$$

Une étude fonctions permet de voir que sur $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, la fonction g atteint ses extremums en $u = -\sqrt{2}$ et $u = \sqrt{2} - 1$ et

$$\sqrt{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \iff t = \frac{5\pi}{4}$$

$$\sqrt{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 1 \iff t \in \left\{ \frac{\pi}{4} \pm \text{Arccos}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

$\begin{aligned} \sup_{(x,y) \in B_f(0,1)} f(x, y) &= \varphi(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \quad \text{avec} \quad \alpha \in \left\{ \frac{\pi}{4} \pm \text{Arccos}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\} \\ \inf_{(x,y) \in B_f(0,1)} f(x, y) &= \varphi(\cos(\beta), \sin(\beta)) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$
--

Exercice 7 (****)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dont la matrice jacobienne est, en tout point, orthogonale. On note

$$\forall (i, j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^3 \quad \alpha_{i,j,k} = \sum_{p=1}^n \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$1. \text{ Montrer } \quad \forall (i, j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^3 \quad \alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j} = -\alpha_{k,j,i}$$

2. En déduire qu'il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = Ax + b$$

Corrigé : 1. Le théorème de Schwarz appliqué à $f_p \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$ fournit la première égalité

$$\forall (i, j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^3 \quad \alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j}$$

La matrice jacobienne $J_f(x)$ est orthogonale pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ donc ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ d'où

$$\forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \sum_{p=1}^n \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial x_k} = \delta_{i,k}$$

En dérivant par rapport à x_j pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il vient

$$\forall (i, j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^3 \quad \sum_{p=1}^n \left[\frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_i} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial x_k} + \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k} \right] = 0 \iff \alpha_{k,j,i} + \alpha_{i,j,k} = 0$$

Ainsi

$$\boxed{\forall (i, j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^3 \quad \alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j} = -\alpha_{k,j,i}}$$

2. La dernière égalité de la relation établie à la première question signifie qu'une permutation circulaire des indices change le signe de la quantité. Ainsi, en effectuant trois permutations circulaires successives, on obtient

$$\forall (i, j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^3 \quad \alpha_{i,j,k} = (-1)^3 \alpha_{i,j,k} \implies \alpha_{i,j,k} = 0$$

Fixons $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $(j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont la p -ième ligne contient $f_{j,k,p} = \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}(x)$. On a

$$J_f^\top(x)X = \left(\sum_{p=1}^n \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}(x) \right)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} = (\alpha_{i,j,k})_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} = 0$$

Or, la matrice $J_f^\top(x)$ est orthogonale donc inversible d'où

$$J_f^\top(x)X = 0 \implies X = 0$$

$$\text{et par suite } \quad \forall (i, j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^3 \quad f_{i,j,k} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial_j f_k) = 0$$

Par caractérisation d'une fonction constante sur $\mathbb{R}^n$ ouvert connexe par arcs, il s'ensuit

$$\forall (j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \exists a_{k,j} \in \mathbb{R} \quad | \quad \partial_j f_k = a_{k,j}$$

Ainsi, la matrice jacobienne de f en tout point est la matrice $A = (a_{i,j})$ qui est par hypothèse orthogonale. Posons

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad g(x) = f(x) - Ax$$

La fonction g est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ avec

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad g_k(x) = f_k(x) - \sum_{i=1}^n a_{k,i} x_i$$

En dérivant par rapport à x_j avec $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il vient

$$\forall (j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \partial_j g_k(x) = \partial_j f_k(x) - a_{k,j} = 0$$

À nouveau par caractérisation d'une fonction constante sur un ouvert connexe par arcs, il s'ensuit

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \exists b_k \in \mathbb{R} \quad | \quad g_k = b_k$$

Notant $b = (b_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$, il en résulte que

Il existe $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = Ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 8 (****)

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, U ouvert borné non vide de E , $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ et f continue sur $\bar{U}$. On définit le *laplacien* de f sur U noté Δf par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U \quad \Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \quad \text{ou} \quad \Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f(x)$$

1. Justifier que f admet un maximum en un point $x_0 \in \bar{U}$.
2. On suppose $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in U$. Montrer

$$x_0 \in \partial U \quad \text{et} \quad \forall x \in U \quad f(x) < \sup_{y \in \partial U} f(y)$$

On pourra supposer par l'absurde que $x_0 \in U$, justifier l'existence d'un $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$ et considérer $\varphi : t \mapsto f(x_0 + te_i)$ avec e_i le i -ème vecteur de la base canonique.

On suppose désormais que f est *harmonique* sur U , i.e. $\Delta f = 0$. On pose

$$\forall \varepsilon > 0 \quad g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x\|^2$$

3. Montrer que g_ε est continue sur $\bar{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que

$$\forall x \in U \quad \Delta g_\varepsilon(x) > 0$$

4. En déduire $\forall x \in U \quad f(x) \leq \sup_{y \in \partial U} f(y)$

Corrigé : 1. Notons $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Comme l'ouvert U est borné, il existe $R \geq 0$ tel que $U \subset B_f(0, R)$ d'où $\bar{U} \subset \overline{B_f(0, R)} = B_f(0, R)$ puisqu'une boule fermée est un fermé. Ainsi, l'ensemble $\bar{U}$ est un fermé borné de E de dimension finie. Par conséquent, la fonction f continue sur le compact $\bar{U}$ est bornée et atteint ses bornes et donc en particulier

La fonction f admet un maximum en $x_0 \in \bar{U}$.

2. Supposons $x_0 \in U$. Par hypothèse, on a $\Delta f(x_0) = \sum_{k=1}^n \partial_k^2 f(x_0) > 0$. Si $\partial_k^2 f(x_0) \leq 0$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, alors $\Delta f(x_0) \leq 0$ ce qui est faux. Ainsi, il existe un entier $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $\partial_i^2 f(x_0) > 0$. Comme $x_0 \in U$ avec U ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset U$. On a pour t réel

$$x_0 + te_i \in B(x_0, r) \iff |t| < r$$

On pose $\forall t \in]-r; r[\quad \varphi(t) = f(x_0 + te_i)$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -r ; r [$ et admet un maximum en zéro puisque f admet un maximum en x_0 . Alors, comme zéro est un point intérieur à $] -r ; r [$, on a

$$\varphi'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi''(0) = \partial_i^2 f(0) > 0$$

D'après le théorème de Taylor-Young, il vient

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \varphi''(0) \frac{t^2}{2} + o(t^2) = \frac{t^2}{2} (\varphi''(0) + o(1))$$

qui est strictement positive au voisinage de zéro ce qui prouve qu'il s'agit d'un minimum strict, ce qui est absurde. Ainsi, la fonction f atteint son maximum sur $\bar{U}$ en un point $x_0 \in \bar{U} \setminus U = \partial U$ d'où

$$\sup_{x \in \bar{U}} f(x) = f(x_0) \leq \sup_{x \in \partial U} f(x) \leq \sup_{x \in \bar{U}} f(x)$$

et ce maximum n'est atteint en aucun point de U d'après ce qui précède d'où

$$x_0 \in \partial U \quad \text{et} \quad \forall x \in U \quad f(x) < \sup_{x \in \partial U} f(y)$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\forall x \in \bar{U} \quad g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^n x_i^2$

Ainsi, la fonction g_ε est somme de la fonction f et d'une fonction polynomiale qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\bar{U}$ et on en déduit

$$g_\varepsilon \in \mathcal{C}(\bar{U}, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad g_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$$

Par dérivation on trouve

$$\forall x \in U \quad \forall i \in [1 ; n] \quad \partial_i^2 g_\varepsilon(x) = \partial_i^2 f + 2\varepsilon$$

d'où

$$\forall x \in U \quad \Delta g_\varepsilon(x) = \Delta f + 2n\varepsilon = 2n\varepsilon > 0$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le résultat de la question 2, on a

$$\forall x \in U \quad f(x) \leq g_\varepsilon(x) < \sup_{y \in \partial U} g_\varepsilon(y)$$

puis

$$\forall y \in \partial U \quad g_\varepsilon(y) = f(y) + \varepsilon \|y\|^2 \leq \sup_{y \in \partial U} f + \varepsilon \sup_{y \in \partial U} \|y\|^2$$

la borne supérieure $\sup_{y \in \partial U} \|y\|^2$ étant finie puisque $\partial U \subset \bar{U}$ qui est borné. Ainsi, on trouve

$$\sup_{y \in \partial U} g_\varepsilon(y) \leq \sup_{y \in \partial U} f + \varepsilon \sup_{y \in \partial U} \|y\|^2$$

d'où

$$\forall x \in U \quad \forall \varepsilon > 0 \quad f(x) < \sup_{y \in \partial U} f + \varepsilon \sup_{y \in \partial U} \|y\|^2$$

Pour $x \in U$, faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, on conclut

$$\forall x \in U \quad f(x) \leq \sup_{x \in \partial U} f$$

Remarque : Ce résultat est intitulé *principe du maximum*.