

Commentaires - Devoir en temps libre n°15

Problème I

La rédaction est très codifiée : relire les consignes du cours. Dans un premier temps, on travaille sur $] -R; R[$ (et non sur $] 0; \pi[$) avec R supposé strictement positif. On cite la dérivation de séries entières. Quand on a déterminé $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} t^{2n}$ pour $t \in] -R; R[$, on pose $u_n = a_{2n} r^{2n}$ avec $r > 0$ pour l'utilisation du critère de d'Alembert (version lacunaire). Les valeurs absolues (ou modules selon les cas) ne sont pas superflues pour l'étude de $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$.

On pouvait avoir l'intuition d'une deuxième forme de solution en $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ sur $I =] 0; \pi[$: il faut alors vérifier que c'est bien le cas (on commence par mentionner que la fonction est deux fois dérivable) et justifier la liberté de la famille des fonctions $\left(t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}, t \mapsto \frac{\cos(t)}{t} \right)$. Les méthodes du wronskien ou de Lagrange ont été déroulées avec succès.

Problème II

1. Il faut vérifier que ch et sh sont bien solutions de (H). Certains échouent à justifier correctement la liberté de (ch, sh) . Ce n'est pas acceptable.

2. OK.

3. Moyennement réussie. Il faut choisir clairement une primitive des fonctions $s \mapsto \text{sh}(s) |\cos(s)|$ et $s \mapsto \text{ch}(s) |\cos(s)|$ et le choix de $t \mapsto \int_0^t \text{sh}(s) |\cos(s)| \, ds$ et $t \mapsto \int_0^t \text{ch}(s) |\cos(s)| \, ds$ est des plus naturels. Il faut penser à distinguer $t \geq 0$ et $t \leq 0$ pour conclure.

4.(a) OK même si certaines rédactions sont très inutilement compliquées.

4.(b) OK.

Problème III

1. OK. Le théorème de Cayley-Hamilton n'intervient pas ici : il faut revoir la définition de *polynôme minimal*. Des choix de matrice triangulaire bien compliqués alors qu'une réduite de Jordan répond parfaitement à la question.

2. OK pour la plupart. Il n'y a toujours pas d'utilisation du théorème de Cayley-Hamilton ici ! Il faut mentionner $(X-1)^2 \wedge (X-2) = 1$ pour utiliser le lemme des noyaux.

3. OK.

4.  Beaucoup d'arnaques : il n'y a pas unicité d'un supplémentaire à un sev de E , on ne peut donc pas conclure directement $\text{Im } p = \text{Ker } (u - 2\text{id})$.
5. Des rédactions parfois bien lourdes ...
6. Il faut mentionner la continuité de la composition (qui est linéaire en dimension finie) pour établir $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}\right) \circ p = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k \circ p}{k!}$.
7. OK.
8. Ne pas omettre la commutation de id et $u - \text{id}$ pour l'utilisation de la propriété fondamentale de l'exponentielle. Il faut là encore invoquer la continuité de la composition. Certains redécouvrent la propriété de l'exponentielle, c'est un peu naïf.
9. Bien.

Problème IV (bonus)

1. Il faut justifier sommairement la forme de $\Phi(u)$ pour $u \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ soit en vérifiant que l'expression proposée est solution et en invoquant l'unicité ou aussi en citant la méthode de variation des constantes.
- 2, 3, 4. OK.
5. Des lourdeurs pour établir $\langle A^k B, X \rangle = 0$ pour tout k entier alors que l'étude de l'algèbre $\mathbb{R}[A]$ est un résultat de cours. La continuité de $Y \mapsto \langle Y, X \rangle$ n'est quasiment jamais citée.
- 6.(a), 6.(b), 6.(c), 7. Bien traitées.