

Commentaires - Devoir surveillé n°5

Le sujet est passionnant mais très difficile avec des manipulations de notions délicates comme l'espérance conditionnelle (notion hors-programme, introduite dans le sujet mais vraiment difficile à appréhender en temps limité). Les thèmes sont variés :

- espaces normés, topologie ;
- convexité ;
- probabilités ;
- géométrie euclidienne.

C'est vraiment un très beau sujet avec un résultat majeur comme aboutissement (même si, pour la majorité des candidats, on peut supposer que ce résultat leur est passé au-dessus ...).

I Préliminaires

Q1. Bien fait mais nombreux sont ceux qui perdent le point de l'interprétation géométrique : identité du parallélogramme.

Q2. Réussite mitigée. Certains recourent à l'inégalité triangulaire qui ne fournit pas naturellement l'inégalité stricte attendue contrairement à l'identité du parallélogramme établie juste avant.

Q3. Question difficile, bien traitée dans quatre copies seulement. Certains mentionnent la caractérisation séquentielle d'une borne inférieure ce qui est bienvenu mais la suite exhibée n'a aucune raison de converger et la fermeture de F ne le garantit nullement. Il fallait passer par un argument de compacité locale en intersectant F avec une boule fermée (argument déjà vu en TD).

Q4. Une coquille dans le sujet : $\forall w \in C$. Certains oublient de mentionner la convexité de C pour affirmer $\frac{v+v'}{2} \in C$ avec v, v' dans C réalisant l'inégalité. Cet oubli rend l'argument très creux hélas ... Il était évidemment impensable de traiter C comme un sev de dimension finie : une telle hypothèse est aberrante avec la suite du sujet.

Q5. Bien fait dans l'ensemble. Beaucoup oublient de distinguer a ou b nuls puis $a, b > 0$ ce qui est pourtant indispensable pour passer au logarithme.

Q6. Beaucoup ont réussi à traiter le cas si $\mathbb{E}(|X|^p) = \mathbb{E}(|Y|^q) = 1$ mais peu ont pu généraliser. L'argument est pourtant classique et consiste à « normaliser ». Le cas de nullité pour une des espérances concernées a été bien traité dans seulement trois copies.

Q7. Question traitée massivement mais il fallait impérativement justifier la permutation des symboles sommes qui sont des sommes finies, l'univers étant fini.

Q8. Question difficile, réussie dans treize copies. Bravo !

Q9. Bien fait. Il faut évidemment détailler un peu la primitivation de $t \mapsto te^{-bt^2}$ vu que le résultat est donné.

Q10. Bien fait. Ceux qui ne citent pas l'inégalité triangulaire ne peuvent prétendre à des points.

Q11. La fonction $u \mapsto u^2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$: elle décroît sur $] -\infty ; 0]$. Plusieurs ont procédé par étude de fonctions ce qui était tout à fait satisfaisant. Cependant, beaucoup amorcent l'étude sans la finaliser : il faut faire preuve de ténacité !

Q12. Raccord de différents résultats précédents, facile.

Q13. Question difficile (bien traitée dans trois copies). Il fallait observer $t - \delta < 0$ et faire parler la première inégalité du sujet en $t = 0$.

II L'inégalité de concentration de Talagrand

Q14. Bien fait.

Q15. Décevant : il suffisait d'observer que $\frac{1}{4}d(X, u)^2$ est une somme de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre (bien traité dans huit copies). Il faut réussir à écrire sans effort l'expression de la norme euclidienne dans une base orthonormée.

Q16. Assez moyen : il fallait faire un simple transfert puis reconnaître un développement du binôme.

Q17. La première inégalité était triviale ! (certains n'ont pas vu ce fait, c'est un peu inquiétant). Pour la deuxième inégalité, il fallait détailler la valeur de $\mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}(X = u)$ pour avoir tous les points.

Q18. Plutôt bien fait.

Q19. Beaucoup d'arnaques, c'est dommage. Si on ne parvient pas à rédiger par équivalence de manière satisfaisante, il faut « sécuriser » sa rédaction en procédant soigneusement par double implication.

Q20. Peu abordée. Quelques très bonnes rédactions mais aussi plusieurs confusions : on ne dispose pas de résultats dans le cours sur des images directes garantissant convexité ou fermeture seules.

Les points gagnés se raréfient notablement à partir de cette question.

Q21. Peu de bonnes choses : Il fallait évoquer un système complet puis l'indépendance de ε_n et X' .

Q22. Quelques copies seulement. Il fallait détailler, ça venait tout seul.

Q23. Question à l'apparence trompeuse : ce n'était pas si simple. Il fallait d'abord utiliser un argument d'orthogonalité puis l'inégalité triangulaire et la convexité de la fonction $u \mapsto u^2$.

Q24. Il fallait détailler clairement un minorant de p_- .

Q25. Personne n'a réussi cette question qui demandait d'avoir compris la notion d'espérance conditionnelle ce qui était très très ambitieux. La croissance de l'espérance conditionnelle n'était pas supposée : il fallait aussi la justifier.

Ensuite, certains arrivent à glaner des points ici ou là, ce que permettait le sujet (Q28, Q29, Q31, Q32 faciles).

Q30. Il faut réussir à dériver sans se tromper ! Et si la dérivée ne suffit pas pour conclure, on peut envisager de dériver à nouveau (initiative spectaculaire pour beaucoup ...)

III Démonstration du théorème de Johnson-Lindenstrauss

Peu abordée. Il y avait des questions plus abordables que d'autres : Q34-Q37 puis Q40-Q43.

Q35. Décevant : le calcul de $\|M \cdot u\|$ a été abordé dans plusieurs copies et réussi nulle part !

Q38. Excessivement difficile, traitée nulle part ...

Q44, Q45. Abordables avec un peu d'audace : il s'agissait surtout d'une synthèse des questions précédentes.