

Corrigé du devoir en temps libre n°16

Problème I

1. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$f(x) = \left(b_1 + \sum_{j=1}^n a_{1,j}x_j, \dots, b_n + \sum_{j=1}^n a_{n,j}x_j \right)$$

L'application f est à coordonnées polynomiales sur $\mathbb{R}^n$ ouvert d'où

$$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

On note $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de f . Par dérivation, on trouve

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \partial_j f_i(x) = a_{i,j}$$

On conclut

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad J_f(x) = (\partial_j f_i(x))_{1 \leq i, j \leq n} = A$$

2.(a) Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$. On a

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \partial_k (\partial_j f_i) = 0$$

et l'ensemble $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de lui-même connexe par arcs. Par caractérisation d'une fonction constante sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ connexe par arcs, il s'ensuit que la fonction $\partial_j f_i$ est constante et la constante pouvant dépendre *a priori* de i et j , on conclut

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \exists a_{i,j} \in \mathbb{R} \quad | \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \partial_j f_i(x) = a_{i,j}$$

2.(b) On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad g(x) = f(x) - Ax = \left(f_1(x) - \sum_{j=1}^n a_{1,j}x_j, \dots, f_n(x) - \sum_{j=1}^n a_{n,j}x_j \right)$$

avec $g_1, \dots, g_n$ les fonctions coordonnées de g . La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ comme composée de telles fonctions. Par dérivation, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \partial_j g(x) = (\partial_j f_1(x) - a_{1,j}, \dots, \partial_j f_n(x) - a_{n,j}) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Par caractérisation d'une fonction constante sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ connexe par arcs, l'ensemble $\mathbb{R}^n$ lui-même en l'occurrence, il s'ensuit que la fonction g est constante, autrement dit il existe $b \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad g(x) = b$$

On conclut

$$\exists (A, b) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \quad | \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = Ax + b$$

Problème II

1. Pour $t > 0$, on a $\varphi(t) = e^t + te^{1/t} > 0$

Ainsi

La fonction φ ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$.

2. La fonction φ est dérivable et on a par dérivation

$$\forall t < 0 \quad \varphi'(t) = e^t + e^{1/t} - \frac{e^{1/t}}{t} > 0$$

On en déduit que la fonction φ croît strictement sur $]0; +\infty[$ avec

$$\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} -\infty \quad \text{et} \quad \varphi(t) \xrightarrow[t \searrow 0]{} 1$$

d'où le tableau de variations

t	$-\infty$	0
$\varphi'(t)$	$-\infty$	1

La fonction φ réalise une bijection de $] -\infty; 0[$ vers $] -\infty; 1[$. Par conséquent, il existe un unique réel $t < 0$ tel que $\varphi(t) = 0$. On observe

$$\varphi(-1) = e^{-1} - e^{-1} = 0$$

On conclut

$$\forall t < 0 \quad \varphi(t) = 0 \iff t = -1$$

3. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ comme composée de telles fonctions. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \nabla f(x, y) = (e^y + ye^x, xe^y + e^x)$$

Ainsi, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} e^y + ye^x = 0 \\ xe^y + e^x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^y + ye^x = 0 \\ (xy - 1)e^x = 0 \end{cases}$$

La condition $xy = 1$ impose notamment x non nul et $y = \frac{1}{x}$. Il s'ensuit

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} e^{1/x} + \frac{e^x}{x} = 0 \\ xy = 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a l'équivalence

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} xy = 1 \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

4. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. D'après l'étude qui précède, la fonction f admet $(-1, -1)$ pour unique point critique et par condition nécessaire, c'est le seul extremum éventuel. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = ye^x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = e^x + e^y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = xe^y$$

En $(-1, -1)$, la matrice hessienne est $e^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ de déterminant égal à $-3e^{-2} < 0$ ce qui prouve que le point $(-1, -1)$ est un point col. On conclut

La fonction f n'admet pas d'extremums sur $\mathbb{R}^2$.

Problème III

1. On suppose f convexe. Soient x, y dans $\mathbb{R}^n$ et s, t réels. Pour $\lambda \in [0; 1]$, il vient en décomposant $1 = \lambda + (1 - \lambda)$

$$\begin{aligned} \varphi_{x,y}(\lambda t + (1 - \lambda)s) &= f(x + (\lambda t + (1 - \lambda)s)(y - x)) \\ &= f(\lambda(x + t(y - x)) + (1 - \lambda)(x + t(y - x))) \leq \lambda \varphi_{x,y}(t) + (1 - \lambda) \varphi_{x,y}(s) \end{aligned}$$

Soient x, y dans $\mathbb{R}^n$. On suppose $\varphi_{x,y}$ convexe. Soit $\lambda \in [0; 1]$. Par convexité, on a

$$\varphi_{x,y}(\lambda \times 0 + (1 - \lambda) \times 1) \leq \lambda \varphi_{x,y}(0) + (1 - \lambda) \varphi_{x,y}(1)$$

autrement dit

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

On conclut

La fonction f est convexe si et seulement pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$, la fonction $\varphi_{x,y}$ est convexe.

2. Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$. On pose $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto x + t(y - x)$. La fonction γ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et par composition, on en déduit que la fonction $\varphi_{x,y} = f \circ \gamma$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'_{x,y}(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

C'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'_{x,y}(t) = \langle \nabla f(x + t(y - x)), (y - x) \rangle$$

3. Soient x, y dans $\mathbb{R}^n$. On suppose f convexe. Par conséquent, la fonction $\varphi_{x,y}$ est convexe ce qui équivaut à la croissance de sa dérivée. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0; 1[$ tel que

$$f(y) - f(x) = \varphi_{x,y}(1) - \varphi_{x,y}(0) = \varphi'_{x,y}(c)$$

et on a

$$\varphi'_{x,y}(c) \geq \varphi'_{x,y}(0) = \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

d'où

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

Réciproquement, soient x, y dans $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0; 1]$. On note $c = \lambda x + (1 - \lambda)y$ et on a

$$\begin{cases} f(x) \geq f(c) + \langle \nabla f(c), x - c \rangle \\ f(y) \geq f(c) + \langle \nabla f(c), y - c \rangle \end{cases}$$

On trouve $x - c = (1 - \lambda)(x - y)$ et $y - c = \lambda(y - x)$. En multipliant la première ligne par λ et la seconde par $(1 - \lambda)$ dans le système précédent, on obtient après addition par linéarité du produit scalaire en la seconde variable

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq (\lambda + 1 - \lambda)f(c) + \langle \nabla f(c), \lambda(1 - \lambda)(x - y) + \lambda(y - x) \rangle$$

c'est-à-dire

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

On conclut

La fonction f est convexe si et seulement si $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$ pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$.

4. On suppose f convexe. D'après le résultat de la question précédente, on a pour x, y dans $\mathbb{R}^n$

$$f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle \quad \text{et} \quad f(x) - f(y) \geq \langle \nabla f(y), x - y \rangle$$

et après sommation des inégalités

$$0 \geq \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), y - x \rangle$$

Réciproquement, soient x, y dans $\mathbb{R}^n$. On a pour $t \in [0; 1]$

$$\langle \nabla f(x + t(y - x)) - \nabla f(x), x + t(y - x) - x \rangle \geq 0$$

d'où

$$\langle \nabla f(x + t(y - x)), t(y - x) \rangle \geq \langle \nabla f(x), t(y - x) \rangle$$

Après simplification pour $t \in]0; 1]$ par linéarité en la deuxième variable, on obtient

$$\langle \nabla f(x + t(y - x)), y - x \rangle \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in]0; 1] \quad \varphi'_{x,y}(t) \geq \varphi'_{x,y}(0)$$

Pour les mêmes raisons que celles présentées pour le sens direct à la question 3, on obtient

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

On conclut

La fonction f est convexe si et seulement si $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$ pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$.