

Préparation à l'interrogation n°21

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \frac{1}{1 - \frac{t^2}{6} + o(t^3)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \left(1 + \frac{t^2}{6} + o(t^3) \right) = -\frac{t}{6} + o(t^2)$$

2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de

$$1 - \cos(t)^n = 1 - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right)^n = 1 - \left(1 - \frac{nt^2}{2} + o(t^2) \right) = \frac{nt^2}{2} + o(t^2)$$

2 Formules

1. Taylor reste intégral

$$2. x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

3 Trigonométrie

$$1. \sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \quad 2. \tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

4 Calcul intégral

$$1. \int^x \frac{dt}{t^\alpha} \text{ avec } \alpha \neq 1; \quad 2. \int^x \frac{dt}{1-t^2}; \quad 3. \int^x \frac{dt}{a^2+t^2} \text{ avec } a \neq 0;$$

5 Techniques

Soient a, b réels non tous nuls. On a

$$a \cos(t) + b \sin(t) = \sqrt{a^2 + b^2} (\alpha \cos(t) + \beta \sin(t)) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Comme $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, il existe θ réel tel que $\alpha = \cos(\theta)$ et $\beta = \sin(\theta)$. Ainsi

$$a \cos(t) + b \sin(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \theta)$$

Application : Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b réels pour que $f : t \mapsto a \cos(t) + b \sin(t)$ ait une limite en $+\infty$.

Si a, b sont non tous nuls, avec l'expression précédemment obtenue, comme la fonction $\cos$ n'admet pas de limite en $+\infty$, alors la fonction f non plus. On conclut que la fonction f admet une limite en $+\infty$ si et seulement si $a = b = 0$.

6 Suites et séries de fonctions

1. Théorème de convergence dominée ;
2. Théorème d'intégration terme à terme ;
3. Théorème de double limite pour une série de fonctions ;
4. Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ pour une série de fonctions.

7 Exercices types

1. Fonction Γ ;
2. Intégrales de Wallis (voir Aide au test 02) ;
3. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
4. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, égalité $\det e^A = e^{\mathrm{Tr}(A)}$;

8 Exercice type

L'ensemble $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$

est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Corrigé : On a $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et contenant 1. Soient (a, b) et (c, d) dans $\mathbb{Q}^2$. On a

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

ce qui prouve que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ ce qui en fait donc un anneau commutatif. Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $a + b\sqrt{2} \neq 0$. En multipliant par la quantité conjuguée, on trouve

$$(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$$

Si $a^2 - 2b^2 = 0$, alors il vient $a - b\sqrt{2} = 0$ ce qui prouve que $\sqrt{2}$ est rationnel, ce qui est faux. On a donc $a^2 - 2b^2 \neq 0$ puis

$$(a + b\sqrt{2}) \left(\frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2} \sqrt{2} \right) = 1$$

ce qui prouve que tout élément non nul de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est inversible. On conclut

L'ensemble $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Remarque : On dit que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est une *extension algébrique* de $\mathbb{Q}$ de degré 2 car c'est un $\mathbb{Q}$ -ev de dimension 2, une base étant donnée par $(1, \sqrt{2})$. On peut construire cette extension en tant qu'anneau quotient $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2)$ où la relation d'équivalence sur $\mathbb{Q}[X]$ est définie pour $(P, Q) \in \mathbb{Q}[X]^2$ par $P - Q \in (X^2 - 2)$ (idéal engendré par $X^2 - 2$).

9 Questions de cours

Anneaux, arithmétique, développements en série entière usuels, graphes usuels.