

Feuille d'exercices n°85

Exercice 1 (*)

Résoudre :

1. $5x \equiv 3 \pmod{7}$

2. $2x \equiv 5 \pmod{6}$

3. $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$

4. $x^2 \equiv -1 \pmod{9}$

Exercice 2 (*)

Un corps $(\mathbb{K}, \times, +)$ est dit *algébriquement clos* si tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré supérieur ou égal à un admet une racine dans $\mathbb{K}$. Soit p premier. Le corps $\mathbb{F}_p$ est-il algébriquement clos ?

Exercice 3 (*)

Résoudre dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ le système
$$\begin{cases} \bar{6}x + \bar{7}y = \bar{0} \\ \bar{6}x - \bar{7}y = \bar{30} \end{cases}$$

Exercice 4 (*)

Soient m et n deux entiers non nuls non premiers entre eux. Les anneaux $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 5 (**)

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 13 \text{ divise } 2^{2^{8n+6}} + 10$

Exercice 6 (**)

Existe-il n entier non nul tel que l'écriture en base 10 de n^{2026} commence (au sens des puissances de 10 croissantes) par 2026 ?

Exercice 7 (**)

Pour n entier non nul, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n .

1. Déterminer une expression de $\tau(n)$ pour $n \geq 2$.
2. Montrer que si m et n sont deux entiers premiers entre eux, alors $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$.

Exercice 8 (**)

Soient a et p des entiers supérieurs à 2.

Montrer que si $a^p - 1$ est premier, alors $a = 2$ et p est premier.

Exercice 9 ()**

Soit p un nombre premier supérieur à 4. Montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Exercice 10 ()**

Déterminer les nilpotents de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec n entier non nul.

Exercice 11 ()**

Soit n entier non nul. Déterminer $\sum_{d|n} \varphi(d)$.

Exercice 12 ()**

1. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$. On suppose que P admet une racine rationnelle $r = \frac{p}{q}$ écrite sous forme irréductible. Montrer

$$p|a_0 \quad \text{et} \quad q|a_n$$

2. Le polynôme $P = X^3 + 3X - 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?

Exercice 13 ()**

Résoudre

1. $x^2 + x + \bar{7} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$;
2. $x^2 - \bar{4}x + \bar{3} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Exercice 14 ()**

Soit n un entier impair non multiple de 5. Montrer qu'il existe un multiple positif de n dont l'écriture décimale est constituée de 1.